

7. Randwertprobleme und Eigenwertprobleme

1. Wir betrachten die Finite Differenzen Diskretisierung (mit äquidistanten Stützstellen) der Poisson Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

- (a) Stellen Sie die Systemmatrix A_{1D} für $\Omega = (0, 1)$ auf.
(b) Zeigen Sie, daß

$$v^{(k)} = [v_i^{(k)}]_{i=1, \dots, n-1}, \quad v_i^{(k)} = \sin \frac{k\pi i}{n}$$

für $k = 1, \dots, n-1$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten von A_{1D} sind, geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an.

- (c) Stellen Sie die Systemmatrix A_{2D} für $\Omega = (0, 1)^2$ auf.
(d) Bestimmen Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte von A_{2D} .
(e) Wie verhalten sich die Konditionszahlen $\kappa_2(A_{1D})$ und $\kappa_2(A_{2D})$ wenn die Anzahl der Stützstellen erhöht wird?

2. Die schwache Formulierung des Poisson Problems läßt sich auch durch ein Minimierungsproblem der folgenden Art herleiten.

Sei \mathbb{V} ein Vektorraum, $a(u, v) : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, $b(v) : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ ein lineares Funktional. Charakterisieren Sie Minimalpunkte des Energiefunktionals

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - b(v).$$

3. Vektoriteration (Potenzmethode), Spektralverschiebung, Inverse Iteration

- (a) Welche Eigenwerte einer Matrix kann man durch Vektoriteration bzw. inverse Iteration bestimmen?
(b) Kann man den betragskleinsten Eigenwert einer Matrix durch Vektoriteration erhalten?
(c) Kann man bei einer 3×3 -Matrix den betragsmäßig mittleren Eigenwert durch Vektoriteration oder Inverse Vektoriteration ermitteln?

4. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 8 \\ -3 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Approximieren Sie den *betragsgrößten* Eigenwert der Matrix A und den zugehörigen Eigenvektor, indem Sie 5 Schritte der Vektoriteration mit dem Startvektor $\underline{x}^1 = (1, 1, 1)^T$ ausführen und zur Eigenwertbestimmung den Rayleigh-Quotienten benutzen!
(b) Approximieren Sie den *betragskleinsten* Eigenwert der Matrix A und den zugehörigen Eigenvektor, indem Sie 5 Schritte der Vektoriteration für die inverse Matrix (Inverse Iteration) mit dem Startvektor $\underline{x}^1 = (1, 1, 1)^T$ ausführen und zur Eigenwertbestimmung den Rayleigh-Quotienten benutzen!
(c) Approximieren Sie einen Eigenwert der Matrix A und den zugehörigen Eigenvektor, indem Sie 5 Schritte der Vektoriteration mit der Matrix $A - I$ und dem Startvektor $\underline{x}^1 = (1, 1, 1)^T$ ausführen!
(d) Der fehlende dritte Eigenwert ist $\lambda = 2$. Geben Sie für die Matrix A in Abhängigkeit von μ an, welchen Eigenwert man mit Hilfe der Vektoriteration (Inversen Vektoriteration) erhält!
Approximieren Sie den fehlenden dritten Eigenwert der Matrix A und den zugehörigen Eigenvektor, indem Sie 5 Schritte der (Inversen) Vektoriteration mit dem Startvektor $\underline{x}^1 = (1, 1, 1)^T$ ausführen! Verschieben Sie zu diesem Zweck das Spektrum geeignet! Interpretieren Sie das Ergebnis!
(e) Kann man den *betragskleinsten* Eigenwert der Matrix A durch Vektoriteration mit der Matrix A (geeignet spektralverschoben) erhalten?