

## 5. Approximation, nichtlineare Gleichungen

1. Für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und einen Vektor  $b \in \mathbb{R}^m$  sei das Ausgleichsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2 \quad (1)$$

zu lösen.

- Welche Situation tritt ein, wenn  $A$  quadratisch und invertierbar ist?
- Zeigen Sie, daß die Lösung der Normalgleichung  $A^T A x = A^T b$  eine Lösung von (1) ist, falls  $A$  vollen Spaltenrang besitzt.
- An den Stellen  $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}$  seien die Werte  $y_1, y_2, \dots, y_m \in \mathbb{R}$  vorgegeben. Diese Punkte sollen durch eine Gerade approximiert werden, so daß die Summe der Fehlerquadrate minimiert wird. Formulieren Sie dieses Problem als Ausgleichsproblem und stellen Sie die entsprechende Normalgleichung auf.
- Lösen Sie

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 2.9 \\ 5.1 \\ 5.2 \\ 11.9 \end{bmatrix} \right\|_2$$

mittels Lösung der Normalgleichung und mittels  $QR$ -Zerlegung (Gram-Schmidt).

2. Mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate bestimme man für die folgenden Wertepaare  $(x_i, y_i)$  approximierende Polynome 1. und 2. Grades und vergleiche die zugehörigen Quadratsummen!

$x_i$	1997	1998	1999	2000	2001
$y_i$	15	5	1	1	3

- Bestimmen Sie die beste Approximation für  $f(x) = e^{x-1}$  durch ein Polynom  $k$ -ten Grades,  $k = 1, 2, 3$  im Raum  $L_2[0, 1]$ . Stellen Sie die Funktionen graphisch dar. Diskutieren Sie die Wahl einer numerisch geeigneten Basis.
- Gegeben sei die Gleichung  $x^3 = 5x - 1$ . Durch grafische Darstellung und/oder Bisektion hat man festgestellt, daß die 3 Nullstellen etwa bei  $-2.35, 0.20$  und  $2.10$  liegen. Der genaue Wert soll nun durch Fixpunktiteration  $x_{k+1} := \varphi(x_k)$  ermittelt werden.
  - Geben Sie verschiedene Fixpunktiterationen an.
  - Welche Konvergenzeigenschaften sind von den zu den Fixpunktgleichungen gehörigen Iterationsverfahren  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$  in der Umgebung der drei Nullstellen zu erwarten?
  - Mit  $x_0 = 2.10$  sind einige (5 bis 10) Iterationsschritte durchzurechnen.
  - Man gebe eine a-priori- und eine a-posteriori-Fehlerabschätzung für  $|x_7 - x^*|$  an.
- Gegeben seien die Polynome 3. Grades

$$y = (x + 1)(x + 2)(x + 3) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \quad (2)$$

$$y = (x + 1)^2(x + 2) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2 \quad (3)$$

- Formulieren Sie für (2) und (3) das Newton-Verfahren. Führen Sie einige Iterationen mit  $x_0 = 0$  aus und beobachten Sie das Konvergenzverhalten.
- Wenden Sie auf (3) das für mehrfache Nullstellen modifizierte Newton-Verfahren an und beobachten Sie den Effekt.
- Führen Sie das Newton-Verfahren für (3) mit  $x_0 = -\frac{5}{3}$  durch.
- Versuchen Sie alternativ die Nullstellen mit dem Sekantenverfahren zu bestimmen.

Verwenden Sie zur Auswertung des Polynoms jeweils das Horner-Schema.

6. Das Polynom  $p(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + a_0$  hat für  $a_0 = 16$  die vierfache Nullstelle  $x = 2$ . Wo liegen die Nullstellen für  $a_0 = 16 \pm 10^{-4}$ ?

7. Gesucht ist die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 0.6y - 0.16 = 0$$

$$g(x, y) = x^2 - y^2 + x - 1.6y - 0.14 = 0$$

- (a) Schreiben Sie den Ansatz für das Newton-Verfahren auf!
- (b) Wie würden Sie das Verfahren programmieren?
- (c) Diskutieren Sie Modifikationen des Verfahrens!