

3. LGS, iterative Verfahren

1. Zeigen Sie, daß Einzel- und Gesamtschrittverfahren für $Ax = b$ Iterationsverfahren der Art

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - C^{-1}(Ax^{(k)} - b)$$

sind. Geben Sie jeweils die Matrix C an.

2. Gegeben sei ein Iterationsverfahren $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$.

(a) Kann das Iterationsverfahren konvergieren, wenn $\|B\|_1 > 1$ ist?

(b) Sei $\|B\| < 1$, $x^* = Bx^* + c$. Beweisen Sie die Abschätzungen

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \|B\|^k \|x^{(1)} - x^{(0)}\|, \quad (1)$$

$$\frac{1}{1 + \|B\|} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|, \quad (2)$$

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|. \quad (3)$$

3. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Man zeige, daß Gesamt- und Einzelschrittverfahren konvergieren.

(b) Für das Einzelschrittverfahren gebe man eine a-priori-Abschätzung für $\|x^{(10)} - x^*\|_\infty$ an. Der Startvektor sei der Nullvektor.

(c) Man gebe eine a-priori-Abschätzung an, wieviele Iterationen man mit dem Einzelschrittverfahren und Gesamtschrittverfahren ausführen muß, damit $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty < 0.1$.

4. Man untersuche die Konvergenz des Gesamtschrittverfahrens für ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Überprüfen Sie, daß sowohl die Zeilen- als auch die Spaltensummennorm der Iterationsmatrix für das Gesamtschrittverfahren größer als 1 ist und somit beide keine Konvergenz anzeigen!

(b) Kann man das Gleichungssystem so umformen, daß das Gesamtschrittverfahren sicher konvergiert?

6. Man gebe für die allgemeine Iterationsvorschrift $x^{i+1} = x^i + \alpha_i p^i$ Bedingungen an α_i und p^i an, damit in einer Hilbertraum-Norm (das bedeutet, es gibt ein zugehöriges Skalarprodukt) $\|b - Ax^{i+1}\| < \|b - Ax^i\|$ gilt!

7. Sie haben verschiedene Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme kennengelernt. Diskutieren Sie, wann Sie welches Verfahren einsetzen würden.