2. Hausaufgabe

Abgabe der Lösung in Papierform. Für die Programmierteile der HA wird Matlab empfohlen. Alle selbst erstellten Programme sind ausgedruckt einzureichen. Erfüllen der Aufgaben mit Matlab ist durch eine Mitschrift der Session (Funktion `diary`) zu belegen. Die für einzelne Aufgaben relevanten Stellen in der Mitschrift sind durch die Aufgabennummer kenntlich zu machen. (Nicht relevante Teile sollten möglichst entfernt werden.)

1. Hier sind die Meßdaten für äquidistante Werte von t.

```
t=1:25

y=[ 5.0291 6.5099 5.3666 4.1272 4.2948 ...
6.1261 12.5140 10.0502 9.1614 7.5677 ...
7.2920 10.0357 11.0708 13.4045 12.8415 ...
11.9666 11.0765 11.7774 14.5701 17.0440 ...
17.0398 15.9069 15.4850 15.5112 17.6572]'
```

(siehe `HA2_A1_vektor.m` auf unten stehender Website) gegeben.

   (a) Approximieren Sie die Daten im Sinne der kleinsten Quadrate durch eine Gerade $y(t) = \beta_1 + \beta_2 t$ und plotten Sie die Residuen $y_k - y(t_k)$. Sie sollten beobachten, daß das Residuum bei einem Datenpunkt viel größer ist als bei den übrigen. Das ist wahrscheinlich ein Ausreißer.

   (b) Eliminieren Sie den Ausreißer und führen Sie eine lineare Approximation wie in (a) noch mal durch. Plotten Sie die Residuen erneut. Läßt sich dabei ein Muster erkennen?

   (c) Approximieren Sie die Daten (ohne den Ausreißer) diesmal durch ein Modell der Form
$$y(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 \sin(t).$$

   (d) Plotten Sie das Modell aus (c) auf dem Intervall $[0, 26]$. Verwenden Sie dabei ein feines Gitter und den Linienstil '-'. Auf demselben Plot bilden Sie die Daten ('o') und den Ausreißer ('*') ab.

2. Wir betrachten die Aufgabe, zu einer nichtlinearen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ zu berechnen. Ist f stetig, so motiviert der Zwischenwertsatz aus der Analysis die Methode der *Intervallschachtelung*. Haben wir ein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $f(a)f(b) < 0$ so existiert ein $s \in [a, b]$ mit $f(s) = 0$. Die Intervallschachtelung berechnet nun den Intervallmittelpunkt $\mu = \frac{a+b}{2}$ und den Funktionswert $f(\mu)$. Ist $f(\mu) = 0$, so sind wir fertig. Anderenfalls entscheidet das Vorzeichen von $f(\mu)$, mit welchem der Teilintervalle $[a, \mu]$ bzw. $[\mu, b]$ wir fortfahren. Dieses Vorgehen wiederholen wir so lange, bis $f(\mu) = 0$ gilt, oder wir die Nullstelle in ein hinreichend kleines Intervall eingeschlossen haben (d.h. bis auf eine vorgegebene Toleranz genau berechnet).

   Bei der Methode der *Regula falsi* starten wir mit einem Intervall $[a, b]$ wie oben. Allerdings wählen wir hier μ nicht als den Intervallmittelpunkt, sondern als die Nullstelle der Geraden durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$. Das Vorzeichen des Funktionswertes von f an dieser Stelle entscheidet wieder, mit welchem Teilintervall wir fortfahren.

   Als Modifikation der Regula falsi verzichtet man bei der *Sekantenmethode* darauf, die Lösung s durch zwei Näherungswerte einzuschließen. Mit 2 vorzugebenden Näherungswerten $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ bestimmen wir wieder die Nullstelle x_2 der Geraden durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$. Ungeachtet der Vorzeichen setzen wir nun aber mit der Geraden durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ fort.

   (a) Entwickeln Sie Algorithmen für diese 3 Verfahren. Was sind geeignete Abbruchkriterien?

   (b) Berechnen Sie mit diesen Methoden die größte Nullstelle von
$$f(x) = x^3 - 9x^2 + \frac{11}{4}x + \frac{315}{4},$$
   mit geeigneter Genauigkeit. Wie sind dazu die Startwerte zu wählen?

   (c) Vergleichen Sie die Methoden in Bezug auf Genauigkeit und Konvergenzgeschwindigkeit.

   (d) Wo liegt der Vorteil dieser Verfahren gegenüber dem Newton Verfahren?

bitte wenden

3. Ein gebräuchliches Verfahren zur Berechnung der Zahl $\sqrt[k]{a}$ besteht darin die Gleichung $x^k - a = 0$ nach Newton iterativ zu lösen.
   (a) Geben Sie eine Iterationsvorschrift an.
   (b) Zeigen Sie, daß das Verfahren für alle $x_0 > 0$ konvergiert.
   (c) Berechnen Sie den Wert $\sqrt[3]{17}$ auf $\pm 10^{-7}$ genau.

4. Implementieren Sie das Newton-Verfahren zum Lösen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} -x_1 - \frac{1}{81}\cos x_1 + \frac{1}{9}x_2^2 + \frac{1}{3}\sin x_3 &= 0 \\ \frac{1}{3}\sin x_1 - x_2 + \frac{1}{3}\cos x_3 &= 0 \\ -\frac{1}{9}\cos x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}\sin x_3 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

   Die Funktion kann z.B. folgendermaßen aussehen: `function [x,k]=newton_ha2(x0,tol,nmax)`, wobei `x` die gefundene Lösung von $F(x) = 0$, `k` – die benötigte Anzahl der Iterationen, `x0` – der Startwert, `tol` – die gewünschte Genauigkeit, `nmax` - die maximale Anzahl von Iterationen ist.

5. Gegeben sei das Integral

$$I(u) = \int_0^{10} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

   Man schreibe ein Computerprogramm, das das Integral $I(u)$ mittels numerischer Integration nach verschiedenen Verfahren berechnet. Es sollen die Mittelpunktregel, die Trapezregel und die Simpsonregel sowie Romberg-Schema implementiert werden.

   Zu Testzwecken sollen die Ergebnisse der ersten drei Verfahren für $n = 10$ äquidistante Stützstellen ausgegeben werden sowie $Q_8^{(4)}$ für das Romberg-Schema.

6. Wir betrachten das Lorenzsystem

$$x'(t) = f(\,x(t)\,), \qquad f(y) = \begin{bmatrix} 10(y_2 - y_1) \\ y_1(28 - y_3) - y_2 \\ y_1 y_2 - \frac{8}{3}y_3 \end{bmatrix}, \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Implementieren Sie das explizite Eulerverfahren sowie das klassische Runge-Kutta Verfahren. Berechnen Sie $x(t)$, $t \in [0, 20]$ für verschiedene Schrittweiten und stellen Sie die Trajektorie $[x_1(t), x_2(t)]$ für eine geeignet kleine Schrittweite dar, geben Sie die verwendeten Schrittweiten an.

   Erstellen Sie eine Tabelle mit den Werten $x(t = 1)$ für beide Verfahren in Abhängigkeit der Schrittweite $\tau = 10^{-k}$, $k = 1, \ldots, 6$.