Ma III_2 für ET / IKT

Aufgaben (41) / (51)

(41)

Gesucht sind Lösungen von $\Delta u = 0$ in der Form

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y).$$

Differenzieren führt auf

$$\Delta u = X''Y + XY'' \overset{!}{=} 0$$

$$\underset{X,Y \neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} \; \underbrace{\overset{!}{=} k = \text{const.}}_{\text{da } x,y \text{ unabh. Variablen}}$$

k > 0:

1. Dgl.: $X'' = kX$

char. Gl.: $\lambda^2 = k \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{k}$

$\leadsto X(x) = A_1 e^{\sqrt{k}x} + A_2 e^{-\sqrt{k}x}$

2. Dgl.: $Y'' = -kY$

char. Gl.: $\lambda^2 = -k \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{k}$

$\leadsto Y(y) = A_3 \cos\sqrt{k}y + A_4 \sin\sqrt{k}y$

Also:

$$u(x,y) = C_1 e^{\sqrt{k}x}\cos\sqrt{k}y + C_2 e^{-\sqrt{k}x}\cos\sqrt{k}y + C_3 e^{\sqrt{k}x}\sin\sqrt{k}y + C_4 e^{-\sqrt{k}x}\sin\sqrt{k}y$$

$k = 0$:

$$X'' = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = A_1 + A_2 x$$
$$Y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y) = A_3 + A_4 y$$

Also

$$u(x,t) = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 xy .$$

$k < 0$:

Analog Fall $k > 0$, aber mit vertauschten Rollen von x und y:

$$u(x,t) = C_1 e^{\sqrt{-k}y} \sin \sqrt{-k}\,x + C_2 e^{-\sqrt{-k}y} \sin \sqrt{-k}\,x + C_3 e^{\sqrt{-k}y} \cos \sqrt{-k}\,x + C_4 e^{-\sqrt{-k}y} \cos \sqrt{-k}\,x$$

//

(51)

Betr. RWP für $u(r, \vartheta, \varphi) = u(\vartheta)$:

$$\Delta u = 0 \qquad (\vartheta \in (\vartheta_1, \vartheta_2))$$
$$u(\vartheta_1) = u_1 = \text{const.}$$
$$u(\vartheta_2) = u_2 = \text{const.}$$

Es gilt $u_r = u_\varphi = 0$, also ist

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2} \cos \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \overset{!}{=} 0 .$$

Wegen $u = u(\vartheta)$ ist also folgendes RWP für gewöhnl. Dgl. zu betrachten:

$$u'(\vartheta) + \cot \vartheta \, u(\vartheta) = 0 \qquad (*)$$
$$u(\vartheta_1) = u_1 , \qquad u(\vartheta_2) = u_2$$

Substitution $y := u'$ überführt $(*)$ in gew. Dgl. 1. Ordn.:

$$y'(\vartheta) + \cot\vartheta \; y(\vartheta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y' = -\cot\vartheta \; y \, .$$

Trennung der Variablen führt auf

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \cot\vartheta \, d\vartheta$$

$$\ln|y| = -\ln \underbrace{\sin\vartheta}_{\in(0,1)} + \tilde{C}_1 \qquad |\exp(\ldots)$$

$$\leadsto \quad y(\vartheta) = \frac{C_1}{\sin\vartheta} \, .$$

Rücksubst. liefert

$$u'(\vartheta) = \frac{C_1}{\sin\vartheta}$$

$$\Rightarrow \quad u(\vartheta) = C_1 \int \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}$$

$$= \underline{\underline{C_1 \ln\tan\frac{\vartheta}{2} + C_2}} \, .$$

Einarb. d. RB:

$$u(\vartheta_1) = C_1 \overbrace{\ln\tan\frac{\vartheta_1}{2}}^{=:D_1} + C_2 \overset{!}{=} u_1$$

$$u(\vartheta_2) = C_1 \underbrace{\ln\tan\frac{\vartheta_2}{2}}_{=:D_2} + C_2 \overset{!}{=} u_2$$

$\leadsto$ Löse LGS in C_1, C_2:

$$C_1 D_1 + C_2 = u_1 \qquad \text{(I)}$$

$$C_1 D_2 + C_2 = u_2 \qquad \text{(II)}$$

$$(\mathrm{I})-(\mathrm{II}): \quad C_1(\vartheta_1-\vartheta_2) = u_1-u_2$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = \frac{u_1-u_2}{\vartheta_1-\vartheta_2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{u_1-u_2}{\ln\tan\frac{\vartheta_1}{2}-\ln\tan\frac{\vartheta_2}{2}}}}$$

$$\text{in } (\mathrm{I}): \quad C_2 = u_1 - C_1\vartheta_1$$

$$= u_1 - \frac{u_1-u_2}{\vartheta_1-\vartheta_2}\,\vartheta_1$$

$$= \frac{\cancel{u_1\vartheta_1} - u_1\vartheta_2 - \cancel{u_1\vartheta_1} + u_2\vartheta_1}{\vartheta_1-\vartheta_2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{u_2\ln\tan\frac{\vartheta_1}{2} - u_1\ln\tan\frac{\vartheta_2}{2}}{\ln\tan\frac{\vartheta_1}{2}-\ln\tan\frac{\vartheta_2}{2}}}}\,.$$

//