TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **WS 2006/2007**
Prof. Dr. P. Benner

Übung zur Vorlesung Lineare Algebra/Analytische Geometrie I

Übung 10 : Basis, Dimension von Vektorräumen

1. Es sei $\{a_1, a_2, a_3\}$ Basis eines linearen Vektorraumes V. Sind dann die Vektoren $b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = a_1 + a_3, \quad b_3 = a_2 + a_3$ auch eine Basis von V?

2. (a) Man zeige, dass die Elemente $a = (2, 1, 0)$ und $b = (1, 2, 0)$ linear unabhängige Elemente des $\mathbb{R}^3$ sind.
   (b) Man ergänze $\{a, b\}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$.
   (c) Man bestimme alle $c \in \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, dass $\{a, b, c\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet.

3. Sei S die Menge aller Folgen reeller Zahlen $\{x_i\} = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ versehen mit der Addition $\{x_i\} \oplus \{y_i\} = \{x_i + y_i\}$ und der Multiplikation mit $\alpha \in \mathbb{R}$ nach der Regel $\alpha \odot \{x_i\} = \{\alpha x_i\}$.
   (a) Man zeige, dass S ein Vektorraum ist.
   (b) Man zeige, dass $\dim S = \infty$ gilt.
   (c) Man finde zwei Unterräume $U \subset S$ und $V \subset S$ so, dass gilt
   $$\dim U = \infty, \ \dim V = \infty, \ \dim(U \cap V) = 3$$

4. Gegeben sei die kanonische Basis $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ in $\mathbb{R}^3$.
   (a) Man ersetze ein Element dieser Basis durch ein anderes Element aus $\mathbb{R}^3$, so dass wieder eine Basis entsteht und der Vektor $(2, 1, 0)$ die Koordinaten $\{1, 0, 0\}$ bezüglich der neuen Basis hat.
   (b) In dieser neuen Basis ersetze man ein weiteres Element durch ein anderes Element aus $\mathbb{R}^3$, so dass eine dritte Basis entsteht, bezüglich derer der Vektor $(0, 0, 1)$ die Koordinaten $\{1, 1, 1\}$ hat.

5. Die Menge $L(V, W)$ aller linearen Abbildungen ist Teilmenge aller Abbildungen
   $$A(V, W) = \{f : V \to W \mid f \text{ Abbildung } \}$$
   zwischen den K-Vektorräumen V und W. Man zeige, dass mit den Operationen
   $$\begin{array}{rrcll} + : & (f+g)(v) & = & f(v) + g(v) & \forall f, g \in A(V, W),\ \forall v \in V, \\ \cdot : & (\lambda \cdot f)(v) & = & \lambda \cdot f(v) & \forall f \in A(V, W),\ \forall \lambda \in K,\ \forall v \in V, \end{array}$$
   $A(V, W)$ ein K-Vektorraum und $L(V, W)$ ein Unterraum von $A(V, W)$ ist.

6. Sei $\mathcal{P}_n$ der Raum aller (reellen) Polynome vom Grade $\leq n$

   (a) Bilden die geraden Polynome G_n einen Unterraum von $\mathcal{P}_n$?

   (b) Zeigen Sie, dass die Polynome $\{(t-1)^i\}_{i=0}^3$ eine Basis von $\mathcal{P}_3$ sind. Geben Sie eine Darstellung des Polynoms $p(t) = \sum\limits_{i=0}^{3} t^i$ bezüglich dieser Basis an.

7. Gegeben sei der Vektor $v = e_1 + 2e_2 - e_3$ (wobei $\{e_i\}_{i=1}^3$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet).

   (a) Zeigen Sie, dass das System $\{e_1, e_2, e\}$ mit $e = (0, 1, 1)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist, und geben Sie die Koordinaten von v in dieser Basis an.

   (b) Beschreiben Sie alle Vektoren e, die das Vektorsystem $\{e_1, e_2\}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ ergänzen.

8. Beschreiben Sie die linearen Teilräume V_a, V_b, die von den Vektoren

   a) $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$ b) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},$

   aufgespannt werden.
   Gilt $v \in V_a$? Wenn ja, geben Sie seine Koordinaten bzgl. $\{v_1, v_2\}$ an.

9. (a) Geben Sie die Dimension des Unterraumes von $\mathcal{P}_n$ an, der von den Polynomen $p_1(t) = t^3 - t^2 + t, \quad p_2(t) = t^2 - t, \quad p_3(t) = 2t^3 - 1$ aufgespannt wird !

   (b) Untersuchen Sie, ob folgende Polynome
   $p_i(t) = t^i - t^{i-1}, \quad i = 1, 2, \cdots n$
   linear unabhängig sind und ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathcal{P}_n$!

10. Sei $V = C([0, 1], \mathbb{R})$ der Vektorraum der in $[0, 1]$ stetigen reellwertigen Funktionen. Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ für Funktionen $f, g \in V$ ein Skalarprodukt ist:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt\,.$$