**TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik** **WS 2006/2007**
**Prof. Dr. P. Benner**

# Übung zur Vorlesung Lineare Algebra/Analytische Geometrie I

## Übung 6 : Matrix-Faktorisierung, Gleichungssysteme

1. Lösen Sie mit Hilfe der LU-Zerlegung der Koeffizientenmatrix $A$ (Aufgabe 7 von Übung 5) Gleichungssysteme $Ax = b$ mit folgenden rechten Seiten:

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad b_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Modifizieren Sie den Algorithmus zur LU-Zerlegung ($A = L \cdot U$) für symmetrische Matrizen $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n,n}$ so, dass $U = L^\top$, d.h. man finde eine untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $A = L \cdot L^\top$.
Funktioniert dieser Algorithmus immer?

3. Wenden Sie den in Aufgabe 2 gefundenen Algorithmus auf folgende Matrizen an.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

4. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender homogener Gleichungssysteme

a)
$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ x + y - 5z &= 0 \\ x - 3z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x - y + z - w &= 0 \\ x + y - z + w &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

5. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungssysteme (über $K = \mathbb{R}$, falls nicht anders angegeben).

(a) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$

(b) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$ über $K = \mathbb{Z}_3$

(c)

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2z & - & w & = & 3 \\ 2x & + & 5y & - & z & - & 9w & = & -3 \\ 2x & + & y & - & z & + & 3w & = & -11 \\ x & - & 3y & + & 2z & + & 7w & = & -5 \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & & & - & 3x_4 & + & x_5 & & & = & 2\\
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & + & 2x_6 & = & 3\\
x_1 & + & 2x_2 & & & - & 3x_4 & + & 2x_5 & + & x_6 & = & 4\\
3x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & - & 9x_4 & + & 4x_5 & + & 3x_6 & = & 9
\end{array}$$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$

(j) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(k) vorige Aufgabe in $K = \mathbb{Z}_2$

(l) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(m) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(n) vorige Aufgabe in $K = \mathbb{Z}_2$.

(o) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $K = \mathbb{Z}_2$