TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **WS 2006/2007**
Prof. Dr. P. Benner

Übung zur Vorlesung Lineare Algebra/Analytische Geometrie I

Übung 5 : Matrizen

1. Welche der folgenden Mengen aus $R^{2\times 2}$ bilden mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe?

$$M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a,b,c \in R = \mathbb{Z}, a,b \neq 0 \right\}, \quad M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid c \in R = \mathbb{Z} \right\},$$

$$M_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a,b,c \in R = \mathbb{Z}_3, a,b \neq 0 \right\}.$$

2. Für $x, y, z \in \mathbb{R}^{n,1}$ gilt bekanntlich

$$(xy^\top)z = x(y^\top z).$$

Wieviele Multiplikationen und Additionen braucht man zur Berechnung von

(a) $(xy^\top)z$ und

(b) $x(y^\top z)$,

wenn jeweils die Klammerausdrücke zuerst ausgewertet werden?

3. Sei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Bestimmen Sie Vektoren (Matrizen aus $\mathbb{R}^{n,1}$ bzw. $\mathbb{R}^{m,1}$), so dass eines der Produkte $A \cdot x$, $y^\top \cdot A$ oder $y^\top \cdot (A \cdot x)$ folgendes Ergebnis liefert:

(a) die j-te Zeile von A,

(b) die k-te Spalte von A,

(c) das Element a_{jk},

(d) die Summe der Elemente der j-ten Zeile von A,

(e) die Summe der Elemente der k-ten Spalte von A,

(f) die Summe aller Elemente von A.

4. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$. Bestimmen Sie für folgende Fälle jeweils eine Matrix C, so dass entweder $B = CA$ oder $B = AC$ aus A erhalten wird durch

(a) Vertauschen der j-ten und k-ten Spalte von A,

(b) Vertauschen der j-ten und k-ten Zeile von A,

(c) Addition des λ-fachen der j-ten Zeile zur k-ten Zeile von A.

Stellen Sie diese Matrizen als Summe $C = I + xy^\top$ dar, wobei I die Einheitsmatrix entsprechender Größe und x, y entsprechende Vektoren sind.

5. Es seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ -1 & 2+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}, \quad C = [\, 1,\ 2+i,\ 2-i \,],$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2+i \\ 2-i \end{bmatrix}, \qquad E = [\, 3,\ 7 \,], \qquad F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 3-3i \\ -5i \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

und die folgenden Vektoren ($n \times 1$-Matrizen) gegeben:

$$w = [\, 2-3i \,], \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Produkte (Matrix$*$Vektor), die definiert sind.

6. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen (Begründung bzw. Lösungsweg!)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4},$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 & & \cdots & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & -c_{n-2} & c_{n-2}+c_{n-1} & -c_{n-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & -c_{n-1} & c_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n},\ c_i \neq 0\ \forall i$$

7. Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 3 & 6 & 12 & 16 & 20 \\ 4 & 8 & 12 & 20 & 25 \\ 5 & 18 & 36 & 56 & 75 \end{pmatrix}$$

Wiederholungen, Ergänzungen, Übungen

1. In einer Menge M sei eine Operation $\circ$ definiert, so dass $\forall a, b \in M : a \circ b \in M$. Man zeige: $(M, \circ)$ ist eine Gruppe, wenn folgende Axiome gelten:

   (1) $\forall a, b, c \in M : \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$,

   (2) $\forall a, b \in M \; \exists \, x \in M : \quad a \circ x = b$,

   (3) $\forall a, b \in M \; \exists \, y \in M : \quad y \circ a = b$,

   Man zeige, dass diese drei Bedingungen unabhängig sind. Hinweis: Man gebe für eine Menge $M = \{a, b, c\}$ solche zweistelligen Operationen $\circ$ an, dass $(M, \circ)$ genau einem der Axiome nicht genügt.

2. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ mit Addition und Multiplikation modulo p genau dann ein Körper ist, wenn p Primzahl ist.

3. Berechnen Sie die Matrixprodukte $A \cdot B$ und $B \cdot A$, falls sie definiert sind:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

   (d) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

   (f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$