TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **WS 2006/2007**
Prof. Dr. P. Benner

Übung zur Vorlesung Lineare Algebra/Analytische Geometrie I

Übung 4 : Gruppen, Ringe, Körper, Matrizen

1. Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und $A = \{f : M \to M\}$ die Menge aller Abbildungen von M nach M. Überprüfen Sie die Gruppeneigenschaften von $(A, \circ)$, wobei $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

2. Man zeige, dass die Menge der linearen Polynome $f(x) = ax + b$ mit Koeffizienten $a, b \in \mathbb{Q},\ a \neq 0$ mit der Operation $(f \circ g)(x) = f(x) \circ g(x) := f(g(x))$ eine Gruppe bildet, und bestimme das neutrale Element und das zu $f(x)$ inverse Element. Ist die Gruppe kommutativ?

3. Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei $x \circ y$ folgendermaßen definiert
   (a) xy^2,
   (b) y,
   (c) $x + y + xy$,
   (d) $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$,
   (e) $x - y$,
   (f) $(x + y)^2$.

   In welchen Fällen ist die Verknüpfung $\circ$ assoziativ?
   In welchen Fällen existiert ein $e \in \mathbb{R}$ mit $e \circ r = r \circ e = r$ für alle $r \in \mathbb{R}$?

4. Zeigen Sie, dass für $\mathrm{k} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ \wedge\ \mathrm{k}^2 \in \mathbb{Q}$ die Menge $Q(\mathrm{k}) = \{r = a + \mathrm{k}b \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring mit Eins ist. Handelt es sich auch um einen Körper?

5. Berechnen Sie AB, BA.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

6.
$$A = \left[a_{ik}\right]_{m \times n}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{bmatrix}, \quad m, n > 1.$$

   Welche der folgenden Ausdrücke sind für $m \neq n$ bzw. bei $m = n$ definiert und welche nicht? Geben Sie (wo es möglich ist) einen Ausdruck für die Elemente der jeweiligen Ergebnisse an.
   a) yAx, b) $y^\top Ax$, c) $x^\top Ay^\top$, d) $x^\top A^\top y$,
   e) $(Ax)^\top y$, f) $x^\top (yA)^\top$, g) Axy, h) $Axy^\top$,
   i) $yx^\top A^\top$, j) $A^\top y^\top x^\top$, k) $y^\top x^\top A$, l) xy, m) yx.

7. Berechnen Sie $BB^\top$, $B^\top B$, AB, BA, $B^\top AB$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Berechnen Sie zu folgenden Matrizen die Inverse, falls diese existiert:
Man beachte, dass die Koeffizienten nicht immer aus $\mathbb{R}$ sind.
(R sei ein kommutativer Ring mit Eins.)
(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$, (b) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in R^{2,2}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{2,2}$.

9. Gibt es in der Menge $P^{2,2}$ der Matrizen über Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten außer I_2 invertierbare Matrizen? – Beispiel oder Gegenbeweis.

10. Man zeige am Beispiel von 2×2-Blockmatrizen, dass deren Multiplikation durch (Matrix-)Multiplikation der Blöcke ausgeführt werden kann:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \quad A, B \in \mathbb{R}^{n,n},\ n = p + q$$
$$A_{11}, B_{11} \in \mathbb{R}^{p,p},\ A_{22}, B_{22} \in \mathbb{R}^{q,q},\ A_{12}, B_{12} \in \mathbb{R}^{p,q},\ A_{21}, B_{21} \in \mathbb{R}^{q,p},$$

Wiederholungen, Ergänzungen, Übungen

1. Welche der Mengen $\mathbb{N}$ (natürliche Zahlen), $\mathbb{Z}$ (ganze Zahlen), $\mathbb{Q}$ (rationale Zahlen), $\mathbb{R}$ (reelle Zahlen), $2\mathbb{Z}$ (gerade Zahlen), $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_4$ (Restklassen modulo 2 bzw. 4) bilden mit den gewöhnlichen Operationen Addition und Multiplikation $(+, \cdot)$ Gruppen, Ringe, Körper? Welche Eigenschaften gelten/gelten nicht?

   Die Operationen in $\mathbb{Z}_2$ bzw. $\mathbb{Z}_4$ sind folgendermaßen definiert:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

•	0	1
0	0	0
1	0	1

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

•	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

2. Sei G eine Gruppe, $a, b \in G$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$(a^{-1})^{-1} = a \qquad \text{und} \qquad (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}.$$