TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **WS 2006/2007**
Prof. Dr. P. Benner

Übung zur Vorlesung Lineare Algebra/Analytische Geometrie I

Übung 3 : Komplexe Zahlen, Abbildungen

1. Berechnen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag der folgenden komplexen Zahlen:
   a) $(2-3i)+i(1-i)$, b) $(1-i)^3$, c) $\dfrac{x-yi}{x+yi}$, $(x, y \in \mathbb{R})$, d) e^{2+i}, e) $\dfrac{1-2i}{1+2i}$.

2. Bestimmen Sie die Polarkoordinaten folgender komplexer Zahlen:
   a) $1-i$, b) $(1-i)^3$, c) e^{2+i}, d) $\cos\varphi - i\sin\varphi$, e) $\sqrt[3]{i}$.

3. Zeigen Sie mit Hilfe der Moivre'schen Formeln:
   $$\cos(5\phi) = 16\cos^5\phi - 20\cos^3\phi + 5\cos\phi$$
   und
   $$\sin(5\phi) = 16\sin^5\phi - 20\sin^3\phi + 5\sin\phi.$$

4. Es seien $z, w \in \mathbb{C}$. Welche geometrischen Bedingungen müssen für die Gültigkeit folgender Gleichungen erfüllt sein?
   (a) $|z+w| = |z| + |w|$,
   (b) $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2$.

5. Unter welchen Bedingungen gilt für $z \in \mathbb{C}$
   (a) $\bar{z} = -z$, (b) $\bar{z} = z$, (c) $\bar{z} = -4z$, (d) $\bar{z} = 2-z$, (e) $z^2 \in \mathbb{R}$?

6. Unter welchen Bedingungen ist das Produkt zweier komplexer Zahlen reell bzw. rein imaginär?

7. Finden Sie alle reellen Zahlen x und y, für die gilt:
   (a) $(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i$, (c) $\dfrac{5x+2xi-3y-3yi}{3+4i} = 2$,
   (b) $x - 8i + (y-3)i = 1$, (d) $\dfrac{ix-4i-y+1}{1+i} = 5+2i$.

8. Stellen Sie die folgenden Punktmengen $\{z \mid \ldots\}$ in der Gauß'schen Zahlenebene dar:
   (a) $|z-z_0| \le R$, $(z_0 \in \mathbb{C},\ R \in \mathbb{R})$
   (b) $\mathrm{Re}(z) \ge 1$,
   (c) $\mathrm{Im}(z) \ge -1$,
   (d) $\mathrm{Re}(z^2) = 1$,
   (e) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \le 1$,
   (f) $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right| = 1$, $(z_1, z_2 \in \mathbb{C})$
   (g) $\left|\dfrac{z}{z+1}\right| = 2$.

9. Zeigen Sie: Für zwei gegebene harmonische Schwingungen

$$y_j(t) := A_j \cos(\omega t + \phi_j),\ j = 1, 2$$

mit der Kreisfrequenz ω ist die Summe wieder eine harmonische Schwingung mit derselben Kreisfrequenz:

$$y(t) := y_1(t) + y_2(t) = A \cos(\omega t + \phi).$$

Berechnen Sie die Amplitude A und die Phasenverschiebung ϕ.

10. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

    (a) $\forall n \in \mathbb{N}: \ n^3 + 6n^2 + 14n$ ist durch 3 teilbar,

    (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3: \ \sum_{k=3}^{n} (2k-1) = n^2 - 4,$

    (c) $\forall n \in \mathbb{N}: \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$

11. Aus welcher der folgenden Aussagen folgt, dass eine gegebene Funktion $f : X \to Y$ surjektiv ist?

    (a) $f^{-1}(Y) = X,$ (b) $f(X) = Y,$ (c) $f^{-1}(X) = Y.$

12. Entscheiden Sie, ob folgende Funktionen $f : A \to B$ injektiv, surjektiv, bijektiv sind. Geben Sie gegebenenfalls Einschränkungen A', B' an, so dass $f : A' \to B'$ bijektiv wird. Bestimmen Sie die inverse Funktion $f^{-1} : B' \to A'$.

a)	$A = B = \mathbb{R},$	$f(x) = \mathsf{e}^x$
b)	$A = \mathbb{R},\ B = \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\},$	$f(x) = \mathsf{e}^x$
c)	$A = \mathbb{R}^+,\ B = \mathbb{R},$	$f(x) = \sqrt{x}$
d)	$A = B = \mathbb{R},$	$f(x) = \sin x$

13. Sei eine Abb. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ gegeben durch

    $(x, y) \to (ax + b, cy + d),\ a, b, c, d, \in \mathbb{R}.$

    Wann ist f surjektiv, injektiv, bijektiv ?

14. Sei ϕ eine Abbildung von der Menge der Menschen, die derzeit leben in die Menge der Menschen die je gelebt haben bzw. noch leben. Wann ist ϕ mit $y = \phi(x)$ eine eindeutige Abbildung ?

    (a) y ist Vater von x

    (b) y ist Großvater von x

    (c) y ist Sohn von x

    (d) y ist älteste Tochter von x

15. Geben Sie alle Teilmengen der Menge $\{1, 2\}$ an.
    Wieviele verschiedene Teilmengen hat eine endliche Menge M?

Wiederholungen, Ergänzungen, Übungen

1. Ein mathematischer Satz hat die Form

   „Wenn die Voraussetzung V gilt, dann gilt die Behauptung B"

   oder oft auch

   „Wenn die (alle) Voraussetzungen $V_1, V_2, \ldots, V_n$ erfüllt sind, dann gelten die (alle) Behauptungen $B_1, B_2, \ldots, B_m$"

   Überzeugen Sie sich von der Äquivalenz der folgenden Formulierungen:

   $$V \Rightarrow B, \qquad \neg B \Rightarrow \neg V$$

   bzw.

   $$\begin{array}{rcll} V_1 \wedge V_2 & \Rightarrow & B & \text{(Satz)} \\ V_1 & \Rightarrow & (V_2 \Rightarrow B) & \text{(Herausziehen einer Vorauss.)} \\ \neg B & \Rightarrow & \neg(V_1 \wedge V_2) & \text{(Kontraposition 1)} \\ \neg B & \Rightarrow & \neg V_1 \vee \neg V_2 & \\ V_1 \wedge \neg B & \Rightarrow & \neg V_2 & \text{(Kontraposition 2)} \\ V_2 \wedge \neg B & \Rightarrow & \neg V_1 & \text{(Kontraposition 3)} \end{array}$$

   Bem.: Kontraposition = Vertausche Behauptung mit (einem Teil) der Voraussetzung und negiere die vertauschten Teile.

   Bestimmen Sie aus folgenden Sätzen jeweils alle Voraussetzungen und Behauptungen und geben Sie entsprechende äquivalente Formulierungen der Sätze an.

   (a) Wenn 2 Teiler des Quadrats einer natürlichen Zahl n ist, dann ist 2 auch Teiler von n selbst.

   (b) Das Quadrat einer geraden natürlichen Zahl ist gerade.

   (c) Wenn das Produkt zweier natürlicher Zahlen ungerade ist, dann ist eine der beiden Zahlen ungerade.

   (d) Die Zahl $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

2. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteile der komplexen Zahlen

   $z_1 = (4 + 3i)(4 - 3i) - 5(5 + 2i)$,

   $z_2 = (3 - 2i)^3$,

   $z_3 = \dfrac{3 + i}{1 - 2i} - \dfrac{2 - 5i}{-2 + i}$.

3. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

   $$z_1 = \sqrt{\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}}, \qquad z_2 = (4\sqrt{3} - 4i)^{1/3}.$$

4. Bestimmen Sie die Polarkoordinaten zu folgenden komplexen Zahlen (Argumente mit 5 Dezimalstellen):

   $z_1 = -2 + 2i, \qquad z_2 = -4 - 3i, \qquad z_3 = -4 + 3i.$