Übung zur Vorlesung Lineare Algebra/Analytische Geometrie I

Übung 2 : Aussageformen und Mengen

1. Eine Aussageform ist ein Ausdruck $A(x)$, der durch Einsetzen eines konkreten Elementes $x \in M$ einer gegebenen Menge zu einer Aussage wird.
   Sind folgende Ausdrücke Aussageformen (für welche Menge M)?
   (a) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
   (b) $x^2 + 1$,
   (c) $2^{47} - 1$ ist eine Primzahl.
   (d) x und y sind teilerfremd.
   (e) x ist im deutschen Alphabet ein Vokal.

2. (a) Erläutern Sie die folgenden Mengenverknüpfungen (wobei A und B Teilmengen einer gegebenen Menge M sind):
   $x \in A,\ x \in \bar{A},\ x \in A \cup B,\ x \in A \cap B,\ x \in A \setminus B,\ \forall x \in A,\ \exists x \in A,$
   $A \subset B,\ A \supset B,\ A \subsetneq B,\ A \times B$ (Bem.: Wir verwenden $\subset$ im Sinne von $\subseteq$.)
   Veranschaulichen Sie die Beziehungen grafisch.
   (b) Wie „zufällig" ist die Ähnlichkeit der Schreibweisen zur Verknüpfung von Aussagen $(\wedge, \vee)$ und von Mengen $(\cap, \cup)$?
   (c) Gibt es für Implikation und Äquivalenz aus der Aussagenlogik eine entsprechende Mengenbeziehung?
   (d) Welcher logischen Aussagenverbindung entspricht die Mengendifferenz $A \setminus B$?

3. (a) Geben Sie folgende Mengen mit Hilfe von Aussageformen an:
   $M_1 = \{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\}$, $M_2 = \{1, 4, 9, 16, 25, \cdots\}$,
   $M_3 = \{2, 4, 8, 16, 32, \cdots\}$, $M_4 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \cdots\}$,
   $M_5 = \{-1, 1\}$, $M_6 = [-1, 1]$,
   $M_7 = (a, b)$, $M_8 = (c, d]$,
   $M_9 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \cdots\}$, $M_{10} = \{-4, -2, +2, 4\}$
   (b) Geben Sie folgende Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente an:
   $M_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2g_1 \ \wedge \ x = 3g_2;\ g_1, g_2 \in \mathbb{Z}\}$,
   $M_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2g_1 \ \vee \ x = 3g_2;\ g_1, g_2 \in \mathbb{Z}\}$,
   $M_3 = \{x \in \mathbb{R} : (x+1)^3 = x^3 + 1\}$,
   $M_4 = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = \cos x\}$, $M_5 = \{x \in \mathbb{R} : e^x = 0\}$,
   $M_6 = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = -\cos x\}$, $M_7 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 + 2x = (x+1)^2\}$,
   $M_8 = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 1} = x - 1\}$, $M_9 = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 3\}$.

4. Gegeben sind die folgenden Mengen:

$$\begin{array}{lcl lcl}
\mathbb{N} & = & \text{Menge aller natürlichen Zahlen}, & M_0 & = & \emptyset, \\
P & = & \text{Menge aller Primzahlen}, & M_3 & = & \{3,4,5,6,7\}, \\
\mathbb{Z} & = & \text{Menge aller ganzen Zahlen}, & M_4 & = & \{0,2,4,6,8\}, \\
M_1 & = & \text{Menge der ungeraden ganzen Zahlen}, & M_5 & = & \{x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} \wedge x = y^2\} \\
M_2 & = & \text{Menge der geraden ganzen Zahlen}, & M_6 & = & \{x \in \mathbb{R} : |x| = 1\}.
\end{array}$$

   Welche Beziehungen bestehen

   (a) paarweise zwischen allen angegebenen Mengen,
   (b) $M_1 \cap M_2$ bzw. $M_1 \cup M_2$ zu den anderen Mengen,
   (c) $M_3 \cap M_4$ bzw. $M_3 \cup M_4$ zu den anderen Mengen,
   (d) $M_3 \setminus M_4$ bzw. $M_4 \setminus M_3$ zu den anderen Mengen ?

5. Zeigen Sie, dass für beliebige Mengen A und B gilt:

   (a) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$,
   (b) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

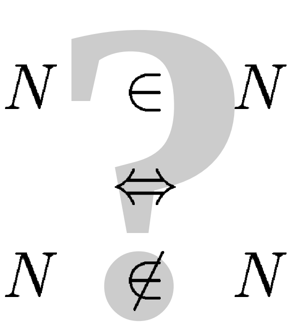
6. Seien A, B, C Mengen. Zeigen Sie

   (a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
   (b) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$
   (c) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$
   (d) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
   (e) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

7. Für $t > 0$ sei $M_t = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq t\}$
   Bestimmen Sie

   a) $\bigcup\limits_{0<t\leq 1} M_t$ b) $\bigcap\limits_{0<t\leq 1} M_t$ c) $\bigcap\limits_{1\leq t<2} M_t$ d) $\bigcup\limits_{0<t<1} M_t$

8. Zum Abschluss wieder ein kleines Paradoxon.



   Wir sagen, dass S ein *einfaches Objekt* ist, wenn es durch 5 Wörter definierbar ist.
   Sei S das folgende Objekt: „Die Menge aller einfachen Objekte“.
   S ist mit 5 Worten definiert, also ein *einfaches Objekt.*
   Andererseits ist S aber auch eine Menge, also gilt $S \in S$.
   Wir wollen Mengen, die sich selbst als Objekt haben, als *exotisch* bezeichnen, alle anderen Mengen als *normal.*
   Nun definieren wir die Menge N als Menge aller *normalen* Mengen.
   Frage: Ist die Menge N *exotisch* oder *normal* ?

   Mehr davon gibt es bei `www.google.de` mit den Stichworten „Russellsches Paradoxon“ bzw. „Cantorsches Paradoxon“ .

Wiederholungen, Ergänzungen, Übungen

1. Wir definieren einige Aussageformen:

$$\begin{aligned} a(x) &= 2|x \\ b(x) &= 3|x \\ c(x) &= 6|x \\ d(x) &= 7|x \\ p(x) &= \text{„}x \text{ ist eine Primzahl“} \end{aligned}$$

   Formulieren Sie die folgenden Aussagen und bestimmen Sie deren Wahrheitswert:

   (a) $\forall x \in \mathbb{N} : a(x) \Rightarrow \neg p(x)$

   (b) $\forall x \in \mathbb{N} : (a(x) \wedge b(x)) \Leftrightarrow c(x)$

   (c) $\exists x \in \mathbb{N} : (\neg a(x) \wedge \neg b(x)) \Rightarrow p(x)$

   Stellen Sie die folgenden Aussagen durch logische Symbole dar.

   (d) Alle ungeraden Zahlen sind Primzahlen.

   (e) Es gibt keine reelle Zahl x mit $x^2 < 0$.

   (f) Es gibt keine Primzahl, die durch 3 teilbar ist.

2. Negieren Sie die Aussagen (a)-(f) aus Aufgabe 1 in der symbolischen und in der verbalen Formulierung und geben Sie die Wahrheitswerte an.

3. Für die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen seien folgende Aussageformen gegeben:
   $A(x) = 2|x$ (2 ist Teiler von x), $B(x) = x^2 \geq 0$.

   Bestimmen Sie den Wahrheitswert der Aussagen

(a)	$\forall x \in \mathbb{Z}$	:	$A(x)$	(b)	$\exists x \in \mathbb{Z}$	:	$A(x)$
(c)	$\forall x \in \mathbb{Z}$	:	$B(x)$	(d)	$\exists x \in \mathbb{Z}$	:	$B(x)$
(e)	$\forall x \in \mathbb{Z}$	:	$B(x) \Rightarrow A(x)$	(f)	$\exists x \in \mathbb{Z}$	:	$B(x) \Rightarrow A(x)$

4. Zeigen Sie, dass für beliebige Mengen A, B, C gilt:

   (a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5. Stellen Sie die folgenden Aussagen auf unterschiedliche Art dar (symbolisch, andere verbale Formulierung) und bilden Sie die Negationen und deren verbale Formulierungen.

   (a) Es gibt keine Primzahl, die durch 7 teilbar ist.

   (b) Es gibt eine reelle Zahl x, für die $x = 4$ und $x = 0$ gilt.

   (c) Zu jeder reellen Zahl a gibt es eine Zahl b, so dass $a \cdot b = 1$.

   (d) Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine größere Primzahl.