TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **WS 2006/2007**
Prof. Dr. P. Benner

Lineare Algebra/Analytische Geometrie I
12. Hausaufgabe, Abgabe: 31.01.2007

1. Es sei V der Vektorraum der Polynome maximal dritten Grades über $K = \mathbb{R}$.
   In V seien folgende Vektoren gegeben

   $$v_1 = x - 1,\ v_2 = x^2 - 1,\ w_1 = x + 1,\ w_2 = x^2 - x,\ w_3 = x^3,\ w_4 = 3x$$

   Untersuchen Sie, ob die Voraussetzungen des Basisergänzungssatzes erfüllt sind. Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, $\{v_1, v_2\}$ mit Vektoren aus $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ zu einer Basis von V zu ergänzen.

2. (a) Es sei V ein K-Vektorraum mit Skalarprodukt und $\|\cdot\|$ die induzierte Norm. Zeigen Sie, dass für zwei beliebige Vektoren $v, w \in V$

   $$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\,\|v\|^2 + 2\,\|w\|^2 .$$

   Geben Sie eine geometrische Interpretation dieser Gleichung (z.B. für $V = \mathbb{R}^2$).

   (b) Überprüfen Sie, ob die Gleichung auch in $V = \mathbb{R}^n$ mit den Normen $\|\cdot\|_1$ bzw. $\|\cdot\|_\infty$ gilt (Beweis oder Gegenbeispiel).

3. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{O}_n$ der orthogonalen Matrizen in $\mathbb{R}^{n,n}$ mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

4. (a) Bestimmen Sie aus den gegebenen Vektoren $v_i \in \mathbb{R}^3$

   $$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   eine Orthonormalbasis $\{w_1, w_2, w_3\}$ mit $w_1 := \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$.

   (b) Berechnen Sie die Fourier-Entwicklung bezüglich dieser Orthonormalbasis für den Vektor $v = [1, 2, 3]^\top$.