TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **WS 2006/2007**
Prof. Dr. P. Benner

Lineare Algebra/Analytische Geometrie I
10. Hausaufgabe, Abgabe: 17.01.2007

1. Überprüfen Sie, ob folgende Mengen V über dem Körper K mit den Operationen $\oplus$ und $\odot$ Vektorräume sind. (6 P.)

   (a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $\lambda \odot (x, y) = (\lambda x, y)$,

   (b) $K = \mathbb{Z}_2$, $V = \mathbb{Z}_2{}^n$ (Koordinatenraum über dem Körper der Restklassen mod 2),
   $(x_1, \dots, x_n) \oplus (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$,
   $\lambda \odot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$,

   (c) $K = \mathbb{C}$, $V = \mathcal{P}$ (Menge aller Polynome mit komplexen Koeffizienten)
   $(p \oplus q)(x) = p(x) + q(x)$, $(\lambda \odot p)(x) = \lambda p(x)$,

   (d) wie (1c), mit $V = \{p \in \mathcal{P} : p(0) = 1\}$,

   (e) wie (1c), mit $V = \{p \in \mathcal{P} : p(0) = 0\}$.

2. Zeigen Sie, dass die Menge $V = \mathbb{R}_+$ (:= Menge aller positiven reellen Zahlen) mit den Operationen (6 P.)

   $$x \oplus y = xy,\ \lambda \odot x = x^\lambda,\ (x, y \in V,\ \lambda \in \mathbb{R})$$

   ein Vektorraum ist. Geben Sie einen Homomorphismus $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ an, wobei $\mathbb{R}$ der Vektorraum der reellen Zahlen ist, mit den üblichen Operationen $+$ und $\cdot$ als Vektoraddition und Skalarmultiplikation. Ist dies auch ein Isomorphismus?

3. Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren eine Basis des Vektorraumes $V = \mathbb{R}^n$ bilden. (5 P.)

   $$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad v_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Bestimmen Sie für den in der kanonischen Basis gegebenen Vektor $v = [1, 2, 3, \dots, n]^\top$ die Koordinatendarstellung bezüglich der Basis $\{v_i\}$, d.h. $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$. Wie lauten diese Koordinaten für einen beliebigen Vektor $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^\top \in V$.

4. Man bestimme alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass (4 P.)

   (a) $(1 + \alpha, 2), (1, 2 + \alpha)$ eine Basis in $\mathbb{R}^2$ ist;

   (b) $(\alpha^2, 4, 9), (\alpha, 2, 3), (1, 1, 1)$ eine Basis in $\mathbb{R}^3$ ist.