TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **WS 2006/2007**
Prof. Dr. P. Benner

Lineare Algebra/Analytische Geometrie I

9. Hausaufgabe, Abgabe: 10.01.2007

1. Zeigen Sie, dass für das Signum einer Permutation $\sigma \in S_n$ gilt: (3 P.)

$$\operatorname{sgn}\,\sigma = \prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}.$$

2. Gegeben sind drei Punkte $P_i = (x_i, y_i)$, $(i = 1, 2, 3)$. Es gelte: $P_1 \neq P_2$ und P_3 erfüllt **nicht** die Gleichung (a).
Bestimmen Sie die Lösungsmengen $\{(x, y)\} \subset \mathbb{R}^2$ der folgenden beiden Gleichungen als Punktmengen in der Ebene. (6 P.)

a)

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{bmatrix} = 0,$$

b)

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ x^2+y^2 & x_1^2+y_1^2 & x_2^2+y_2^2 & x_3^2+y_3^2 \end{bmatrix} = 0.$$

Hinweis zu (b):
Entwicklung nach 1. Spalte, ohne die dabei auftretenden Determinanten der 3×3-Minoren ausführlich auszurechnen – der Einfachheit wegen bezeichnen wir diese mit D_1, D_2, D_3, D_4. Trotzdem soll die geometrische Beschreibung der Lösungsmenge nicht nur eine unbewiesene Behauptung oder Vermutung sein.

c) Skizzieren Sie die entsprechenden Punktmengen für (a) und (b) zu den gegebenen Punkten

$$P_1 = (-2, 6), \quad P_2 = (5, 5), \quad P_3 = (1, -3).$$

3. Beweisen Sie die *Cramer'sche Regel* (vgl. Beweis von Satz V.15): (3 P.)
Sei $\mathbb{K}$ Körper, $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{K}^n$, $\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang}[A, b] = n$. Dann ist die Lösung von $Ax = b$ gegeben durch

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A)b$$

bzw.

$$x_i = \frac{\det([a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n])}{\det A}$$

4. Benutzen Sie die Cramer'sche Regel, um in folgenden Gleichungssystemen jeweils die Funktionen $f_i(x)$ zu bestimmen ($i = 1, 2$ bzw. $i = 3, 4$): (4 P.)

a)
$$\begin{aligned} (1-x)\cdot f_1(x) &- & x\cdot f_2(x) &= -2x^2+2x+1 \\ (2x+1)\cdot f_1(x) &+ & (x+1)\cdot f_2(x) &= 3x^2+2x-1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} (1-x)\cdot f_3(x) &+ & x\cdot f_4(x) &= -x^3+2x^2+1 \\ -x\cdot f_3(x) &+ & (x+1)\cdot f_4(x) &= -x^3+x^2+x+1 \end{aligned}$$

5. Vergleichen Sie den Rechenaufwand zum Lösen eines $n \times n$ Gleichungssystems (4 P.)

(a) bei Anwendung der Cramer'schen Regel (und Entwicklungssatz für Determinanten),

(b) bei Anwendung des Gauß-Jordan-Verfahrens
(oder der LR-Zerlegung mit Vor- und Rückwärtseinsetzen),

indem Sie die wesentlichen Operationen (Additionen/Multiplikationen) *„zählen“ bzw. möglichst genau schätzen*, in Abhängigkeit von n.

(c) Wie lange dauert die Berechnung nach (a) und (b) für $n = 10$, $n = 100$ bzw. $n = 1000$ auf einem Pentium 4, der bei guter Optimierung etwa 2 Gflops (= 2 Mrd. Operationen pro Sekunde) schafft?
Bis zu welcher Größe n erhält man innerhalb einer Minute das Ergebnis?