TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **WS 2006/2007**
Prof. Dr. P. Benner

Lineare Algebra/Analytische Geometrie I

8. Hausaufgabe, Abgabe: 03.01.2007

1. Zeigen Sie: Die Menge S_n der Permutationen auf $\{1, 2, \ldots, n\}$ bildet mit der Operation *Hintereinanderschaltung* (=„Produkt" von Permutationen)

$$(\sigma_1 \circ \sigma_2)(i) = \sigma_1(\sigma_2(i))$$

eine Gruppe. (3 P.)

2. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme mittels Cholesky-Zerlegung. (5 P.)

(a) $$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 5 \\ 4 & 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(b) $$\begin{bmatrix} a^2 & a & -a \\ a & 5 & 1 \\ -a & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a(a-1) \\ 2(a-2) \\ 2(2-a) \end{bmatrix}, \qquad a > 0$$

3. Seien $A, B \in R^{2,2}$. Unter welchen (möglichst allgemeinen) zusätzlichen Bedingungen an die Elemente von A und B gilt

$$\det(A + B) = \det(A) + \det(B) \ \ ?$$

Geben Sie je ein Paar von Matrizen (A_i, B_i) an (keine Nullmatrizen), so dass gilt $\det(A_1 + B_1) = \det A_1 + \det B_1$ und $\det(A_2 + B_2) \neq \det A_2 + \det B_2$. (3 P.)

4. Berechnen Sie die Determinante folgender symmetrischer Matrix $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ in Abhängigkeit von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{bmatrix} 14\cos^2\alpha + 3 & -14\cos\beta\sin\alpha\cos\alpha & 14\sin\beta\sin\alpha\cos\alpha & 7\cos\alpha \\ -14\cos\beta\sin\alpha\cos\alpha & 14\cos^2\beta\sin^2\alpha + 3 & -14\sin\beta\cos\beta\sin^2\alpha & -7\cos\beta\sin\alpha \\ 14\sin\beta\sin\alpha\cos\alpha & -14\sin\beta\cos\beta\sin^2\alpha & 14\sin^2\beta\sin^2\alpha + 3 & 7\sin\beta\sin\alpha \\ 7\cos\alpha & -7\cos\beta\sin\alpha & 7\sin\beta\sin\alpha & 16 \end{bmatrix}.$$

Auf die ausführliche Niederschrift des Lösungsweges wollen wir hier verzichten, wünschen aber für ***das richtige Ergebnis*** viel Erfolg. (3 P.)

5. Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ und Vektoren $x^{(i)} \in \mathbb{R}^4$ gilt $x^{(i+1)} = Ax^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, wobei $x^{(3)}$ bekannt sei: (4 P.)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} -3 \\ -12 \\ -7 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie die Lösung $x^{(1)}$ mittels LR-Zerlegung von A.