Lineare Algebra/Analytische Geometrie I
2. Hausaufgabe, Abgabe: 1.11.2006

1. Die *symmetrische Differenz* zweier Menge $A, B \subset M$ ist definiert durch (6 P.)

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Zeigen Sie für $A, B, C \in M$ folgende Eigenschaften:

(a) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$,

(b) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.

Stellen Sie die Mengen auch grafisch dar.

2. Berechnen Sie für jeden der folgenden Ausdrücke die algebraische Darstellung (d.h., eine Form $z = \alpha + i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$): (4 P.)

$$a = \frac{5}{-3+4i}, \qquad b = (1+i)^{16}, \qquad c = (1+i)^n + (1-i)^n, \qquad d = (-8 + 8\sqrt{3}i)^{1/4}.$$

3. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke (für $z \in \mathbb{C}$): (2 P.)

(a) $[1 - \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)][1 - \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)]$,

(b) $\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(iz)}$.

4. Zeigen Sie die Gültigkeit der Regeln aus Lemma I.17 für $z = x + iy,\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$: (8 P.)

Komplexe Konjugation:

(i) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$,

(ii) $\overline{(\bar{z})} = z$,

(iii) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$,

(iv) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$,

(v) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

Betrag komplexer Zahlen:

(i) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

(ii) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$,

(iii) $|z_1 - z_2| \ge \big|\,|z_1| - |z_2|\,\big|$.