# Vektoranalysis

## 4. Übung – Krummlinige Koordinaten

---

1. Überprüfen Sie, ob folgende Koordinatentransformationen orthogonal sind, und geben Sie in diesem Fall das Rechtsdreibein entlang der Koordinatenlinien an:

   (a) (parabolische Zylinderkoordinaten)
   $x_1 = \dfrac{u_1^2 - u_2^2}{2}\,, \;\; x_2 = u_1 u_2\,, \;\; x_3 = u_3\,, \;\; (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,s) : s \in \mathbb{R}\}$

   (b) (rotationsparabolische Koordinaten)
   $x_1 = u_1 u_2 \cos u_3\,, \;\; x_2 = u_1 u_2 \sin u_3\,, \;\; x_3 = \dfrac{u_1^2 - u_2^2}{2}\,, \;\; (u_1, u_2, u_3) \in (0, \infty)^2 \times [0, 2\pi]$

   (c) (elliptische Zylinderkoordinaten, $a > 0$)
   $x_1 = a \cosh u_1 \cos u_2\,, \;\; x_2 = a \sinh u_1 \sin u_2\,, \;\; x_3 = u_3\,,$
   $(u_1, u_2, u_3) \in (\mathbb{R} \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}) \setminus \{(0,0,s) : s \in \mathbb{R}\}$

2. Berechnen Sie die Koordinaten von $v(x) = (x_2, -x_3, 1)$ entlang der Koordinatenlinien entsprechend Aufgabe 1, (a)-(c).

3. Man berechne $\operatorname{grad} \varphi(T(u))$, $\Delta\varphi(T(u))$ und $\operatorname{div} \overrightarrow{v}(T(u))$ für die in Aufgabe 1, (a)-(c) angegebenen Koordinatentransformationen $T(u)$.

**Bemerkung** zur Aufgabe 1,(a):

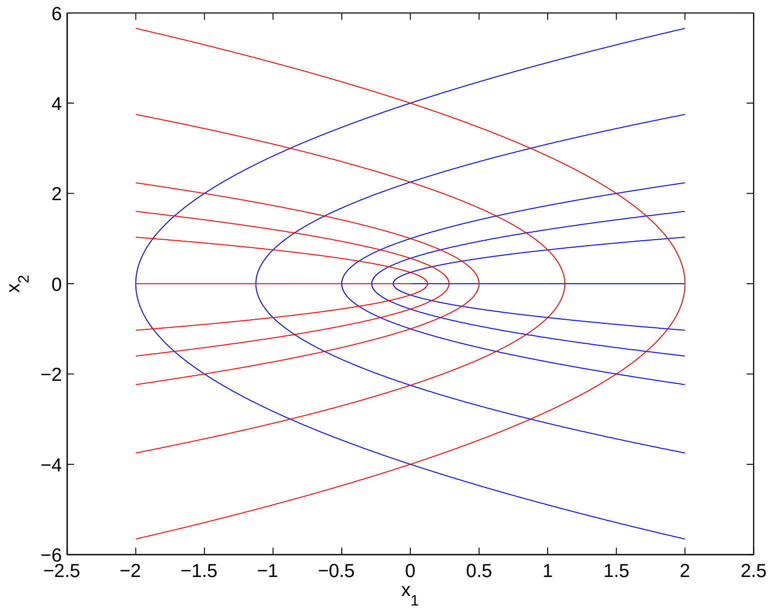
$$T(u) = \left(\frac{u_1^2 - u_2^2}{2}, u_1 u_2, u_3\right) , \quad u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,u_3) : u_3 \in \mathbb{R}\}$$

Die Koordinatenlinien in der $x_1x_2$-Ebene sind die Bilder der Wege

$$\gamma^1(t) = \left(\frac{t^2 - (u_2^0)^2}{2}, t\, u_2^0, 0\right) , \quad \gamma^2(t) = \left(\frac{(u_1^0)^2 - t^2}{2}, t\, u_1^0, 0\right) , \quad t \in \mathbb{R} ,$$

für $u_2^0 \neq 0$ bzw. $u_1^0 \neq 0$ (Parabeln) und der Wege

$$\gamma^1(t) = \left(\frac{1}{2}\, t^2, 0, 0\right) , \quad \gamma^2(t) = \left(-\frac{1}{2}\, t^2, 0, 0\right) , \quad |t| > 0 .$$




Koordinatenlinien in der $x_1x_2$-Ebene

Definieren wir $D = (0,\infty) \times \mathbb{R}^2$ und $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x_1, 0, x_3) : x_1 \leq 0,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$ so realisiert die gegebene Koordinatentransformation $T : D \longrightarrow G$ eine bijektive Abbildung.

Begründung: Offenbar gilt $T(u) \in G$ für alle $u \in D$. Außerdem besitzt für $x \in G$ das Gleichungsystem

$$x_1 = \frac{(u_1)^2 - (u_2)^2}{2} , \quad x_2 = u_1 u_2 , \quad x_3 = u_3 \tag{1}$$

die eindeutige Lösung $u \in D$ mit

$$u_1 = \sqrt{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_1} , \quad u_2 = \frac{x_2}{\sqrt{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_1}} , \quad u_3 = x_3 .$$

Ersetzt man $D$ durch $\widetilde{D} = \mathbb{R}\times(0,\infty)\times\mathbb{R}$ und $G$ durch $\widetilde{G} = \mathbb{R}^3\setminus\{(x_1,0,x_3) : x_1 \geq 0,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$, so ist $T : \widetilde{D} \longrightarrow \widetilde{G}$ ebenfalls bijektiv. Das Gleichungssystem (1) hat dann für $x \in \widetilde{G}$ die eindeutige Lösung $u \in \widetilde{G}$ mit

$$u_2 = \sqrt{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1}\,, \quad u_1 = \frac{x_2}{\sqrt{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1}}\,, \quad u_3 = x_3\,.$$

**Bemerkung** zur Aufgabe 1,(b):

$$T(u) = \left(u_1u_2\cos u_3, u_1u_2\sin u_3, \frac{u_1^2 - u_2^2}{2}\right)\,, \quad u \in (0,\infty)^2 \times [0,2\pi]$$

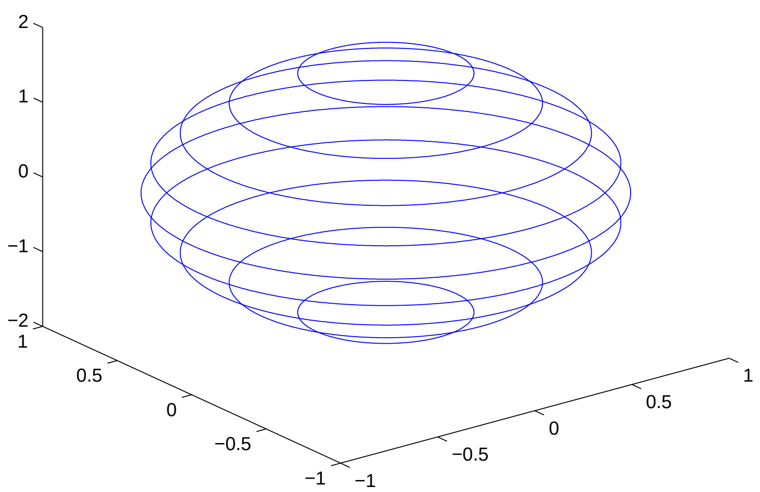
Die Koordinatenlinien sind die Bilder der Wege

$$\gamma^1(t) = \left(t\,u_2^0\cos u_3^0, t\,u_2^0\cos u_3^0, \frac{t^2 - (u_2^0)^2}{2}\right)\,, \quad t > 0\,,$$

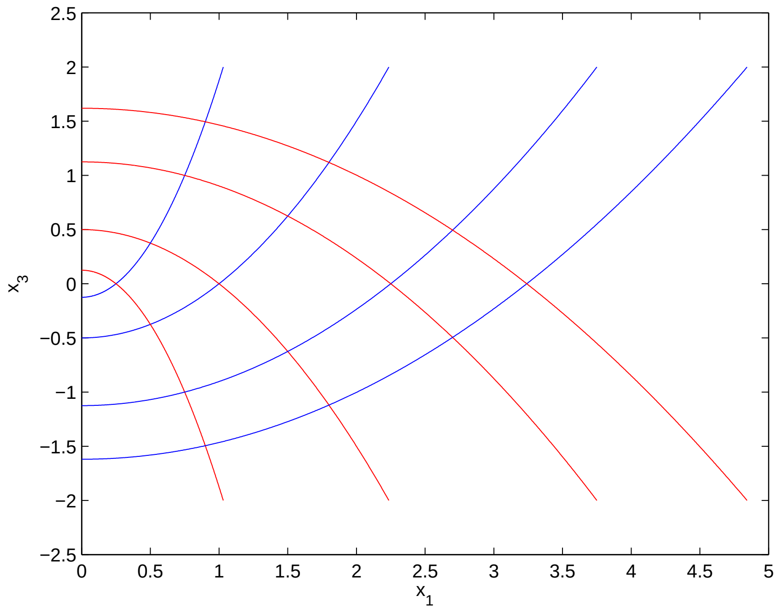
$$\gamma^2(t) = \left(t\,u_1^0\cos u_3^0, t\,u_1^0\cos u_3^0, \frac{(u_1^0)^2 - t^2}{2}\right)\,, \quad t > 0\,,$$

(Parabeläste) und

$$\gamma^3(t) = \left(u_1^0u_2^0\cos t, u_1^0u_2^0\cos t, \frac{(u_1^0)^2 - (u_2^0)^2}{2}\right)\,, \quad t \in [0,2\pi]\,.$$




Koordinatenlinien: Bilder der Wege $\gamma^3$




Koordinatenlinien: Bilder der Wege $\gamma^{1/2}$ für $u_3^0 = 0$

Wählt man $D = (0,\infty)^2 \times [0, 2\pi)$ und $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\}$ , so ist $T : D \longrightarrow G$ bijektiv. Dabei hat für $x \in G$ das Gleichungssystem

$$x_1 = u_1 u_2 \cos u_3\,, \quad x_2 = u_1 u_2 \sin u_3\,, \quad x_3 = \frac{u_1^2 - u_2^2}{2}$$

die eindeutige Lösung $u \in D$ mit

$$u_1 = \sqrt{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + x_3}\,, \quad u_2 = \sqrt{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} - x_3}$$

und

$$\cos u_3 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\,, \quad \sin u_3 = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\,.$$

**Bemerkung** zur Aufgabe 1,(c):

$$T(u) = (a \cosh u_1 \cos u_2, a \sinh u_1 \sin u_2, u_3)\,,\ u \in (\mathbb{R} \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}) \setminus \{(0,0,s) : s \in \mathbb{R}\}$$

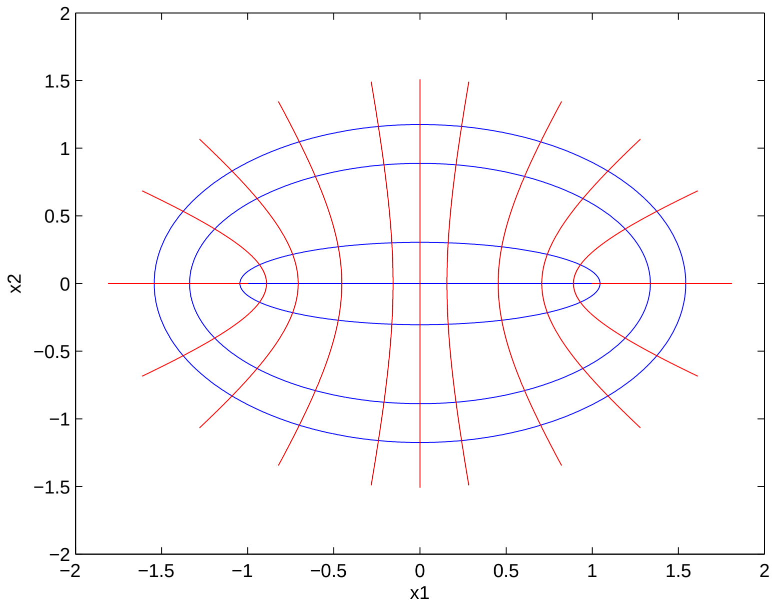
Die Koordinatenlinien in der $x_1x_2$-Ebene sind die Bilder der Wege

$$\gamma^1(t) = \left(a \cosh t \cos u_2^0, a \sinh t \sin u_2^0, 0\right)\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

(Hyperbeläste, falls $u_2^0 \neq 0, \pi, 2\pi$) und

$$\gamma^2(t) = \left(a \cosh u_1^0 \cos t, a \sinh u_1^0 \sin t, 0\right)\,, \quad t \in [0, 2\pi]$$

(Ellipsen, falls $u_1^0 \neq 0$).




Koordinatenlinien in einer Ebene $x_3 = \text{const}$

Wir zeigen, dass $T : D \longrightarrow G$ eine bijektive Abbildung realisiert, wobei $D = \mathbb{R} \times (0, \pi) \times \mathbb{R}$ und $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x_1, 0, x_3) : |x_1| \geq a,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$ . Sei $x = T(u)$ , $u \in D$ . Wäre $x_2 = 0$ , so müsste $u_1 = 0$ sein, woraus $x_1 = a \cos u_2$ und somit $|x_1| < a$ folgt. Also gilt $x \in G$ . Es bleibt zu zeigen, dass für $x \in G$ das Gleichungssystem

$$x_1 = a \cosh u_1 \cos u_2 \,, \quad x_2 = a \sinh u_1 \sin u_2 \,, \quad x_3 = u_3$$

eine eindeutige Lösung $u \in D$ besitzt. Setzt man $b^2 = \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a}\right)^2$ , so erhält man diese als eindeutige Lösungen der Gleichungen

$$\sinh u_1 = \begin{cases} +\sqrt{\sqrt{\dfrac{(1-b^2)^2}{4} + \dfrac{x_2^2}{a^2}} - \dfrac{1-b^2}{2}} & : \quad x_2 > 0 \,, \\ 0 & : \quad x_2 = 0 \,, \\ -\sqrt{\sqrt{\dfrac{(1-b^2)^2}{4} + \dfrac{x_2^2}{a^2}} - \dfrac{1-b^2}{2}} & : \quad x_2 < 0 \,, \end{cases}$$

$$\cos u_2 = \frac{x_1}{a \cosh u_1} \quad \text{und} \quad u_3 = x_3 \,.$$