Probeklausur Vektoranalysis

- **Arbeitszeit**: 120 min
- **Hilfsmittel**:
  Formelsammlung (ohne durchgerechnete Beispiele), Handzettel Vektoranalysis
- Der Lösungsweg sollte klar erkennbar sein. Alle Aussagen sind zu begründen!

1. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks, welches von den Geraden $y = a_1 x$, $y = a_2 x$, $y = 1 - b_1 x$ und $y = 1 - b_2 x$ berandet wird, wobei $0 < a_1 < a_2$, $0 < b_1 < b_2$ gelte.

2. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der von den Flächen $x_2 = x_1^2$, $x_2^2 = x_1$, $x_3 = 0$ und $x_3 = x_1 + x_2$ begrenzt wird.

3. Berechnen Sie das Kurvenintegral erster Art $I = \int_\Gamma (x_1 + x_2) ds$, wobei Γ die Verbindungsstrecke zwischen den Punkten (a, a) und (b, b) mit $a < b$ bezeichnet.

4. Hat das Vektorfeld $v(x) = \cos(x_1 x_2 x_3) \begin{bmatrix} x_2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}^3$ ein Potential? Berechnen Sie $\int_\Gamma \overrightarrow{v}(x)\, dx$, wobei Γ den Polygonzug vom Koordinatenursprung über die Punkte $(3, -1, 0)$ und $\left(\sqrt{\pi}, \sqrt{3}, 32\right)$ nach $\left(1, \pi, \frac{1}{2}\right)$ bezeichnet.

5. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $v(x) = \begin{bmatrix} x_3^2 \\ 2x_2 x_3 \\ x_1^2 \end{bmatrix}$ durch den Zylindermantel $\left\{x_1^2 + x_2^2 = 4,\, 0 \le x_3 \le 2\right\}$. Die Flächennormale zeige nach außen.

6. Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes $v(x, y, z) = \begin{bmatrix} x^2 \\ 2xy \\ z \end{bmatrix}$ durch die Oberfläche des Würfels $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x, y, z \le 1\right\}$. Die Flächennormale zeige nach außen.

7. Gegeben seien $v(x) = \begin{bmatrix} x_2 x_3 \\ x_2 \\ \sqrt{1 + x_1^2} \end{bmatrix}$ und $F = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\, x_3 \ge 0\right\}$. Die Flächennormale auf F zeige in das Äußere der Halbkugel. Man berechne
$$\iint_F \operatorname{rot} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{F} \,.$$

8. Ist $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-|x|^2}$ eine harmonische Funktion?

(Z) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der als Durchschnitt der Halbkugel
$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le a^2,\, x_3 \ge 0\right\} , \quad a > 0$$
mit dem Zylinder $\left\{x \in \mathbb{R}^3 : \left(x_1 - \frac{a}{2}\right)^2 + x_2^2 \le \frac{a^2}{4}\right\}$ entsteht.