Musterlösungen

1. Für die Substitution $y = ux$, $y = 1 - vx$, $a_1 \le u \le a_2$, $b_1 \le v \le b_2$, d.h. $x = \dfrac{1}{u+v}$, $y = \dfrac{u}{u+v}$, erhält man die Funktionaldeterminante

$$J(u,v) = \det \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{(u+v)^2} & -\dfrac{1}{(u+v)^2} \\ \dfrac{v}{(u+v)^2} & -\dfrac{u}{(u+v)^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{(u+v)^3} \,.$$

Damit ist der Flächeninhalt gleich

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{dv}{(u+v)^3}\, du &= \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} \left[\frac{1}{(u+b_1)^2} - \frac{1}{(u+b_2)^2} \right] du \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_2+b_2} - \frac{1}{a_1+b_2} - \frac{1}{a_2+b_1} + \frac{1}{a_1+b_1} \right) . \end{aligned}$$

(Man vergleiche Beispiel 1.20 der Vorlesung!) (4P)

Es gibt viele andere Möglichkeiten: Z.B. kann man den gesuchten Flächeninhalt als Differenz der Flächeninhalte zweier Fünfecke schreiben, die sich als Flächen unter den Graphen zweier stückweise linearer Funktionen ergeben.

2. Das Volumen ist gleich

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{x_1^2}^{\sqrt{x_1}} \int_0^{x_1+x_2} dx_3\, dx_2\, dx_1 &= \int_0^1 \int_{x_1^2}^{\sqrt{x_1}} (x_1+x_2)\, dx_2\, dx_1 \\ &= \int_0^1 \left[x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{2} \right]_{x_2=x_1^2}^{x_2=\sqrt{x_1}} dx_1 \\ &= \int_0^1 \left(x_1^{\frac{3}{2}} + \frac{x_1}{2} - x_1^3 - \frac{x_1^4}{2} \right) dx_1 \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{10} \,. \end{aligned}$$

(4P)

3. Mit $\Gamma = \{\gamma(t) : a \le t \le b\}$, wobei $\gamma(t) = (t,t)$, $\gamma'(t) = (1,1)$ und $|\gamma'(t)| = \sqrt{2}$, folgt

$$\int_\Gamma (x_1+x_2) ds = 2\sqrt{2} \int_a^b t\, dt = \sqrt{2}\left(b^2 - a^2\right) \,.$$

(2P)

4. Offenbar sind $\varphi(x) = \sin(x_1 x_2 x_3)$ ein Potential und somit das gesuchte Integral gleich $\varphi\left(1, \pi, \frac{1}{2}\right) - \varphi(0,0,0) = 1$. (3P)

5. $\overrightarrow{f}(\varphi,z)=\begin{bmatrix}2\cos\varphi\\2\sin\varphi\\z\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{n}(\varphi,z)=\begin{bmatrix}-2\sin\varphi\\2\cos\varphi\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cos\varphi\\2\sin\varphi\\0\end{bmatrix}$,
$0\le\varphi\le 2\pi\,,\ 0\le z\le 2$:

$$\iint_F \overrightarrow{v}\,d\overrightarrow{F}=\int_0^2\int_0^{2\pi}\left(2z^2\cos\varphi+8z\sin^2\varphi\right)\,d\varphi\,dz=8\pi\int_0^2 z\,dz=16\pi$$

(4P)

6. Der Gauß'sche Integralsatz liefert

$$\iint_F \overrightarrow{v}\,d\overrightarrow{F}=\int_0^1\int_0^1\int_0^1(4x+1)\,dx\,dy\,dz=\left[2x^2+x\right]_0^1=3\,.$$

(3P)

7. Mit dem Stokes'schen Integralsatzes erhält man (Γ - Einheitskreislinie in der x_1x_2-Ebene)

$$\begin{aligned}\iint_F \operatorname{rot}\overrightarrow{v}\,d\overrightarrow{F}=\int_\Gamma v(x)\,dx &= \int_\Gamma\left(x_2x_3\,dx_1+x_2\,dx_2+\sqrt{1+x_1^2}\,dx_3\right)\\ &= \int_\Gamma x_2\,dx_2=\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=0\,,\end{aligned}$$

weil $\Gamma=\{(\cos\varphi,\sin\varphi,0):0\le\varphi\le2\pi\}$. (4P)

(Z) Mit $x_1=r\cos\varphi$, $x_2=r\sin\varphi$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $0\le r\le a\cos\varphi$ ergibt sich für das gesuchte Volumen

$$\begin{aligned}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\varphi}\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr\,d\varphi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{2}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a\cos\varphi}d\varphi\\ &= \frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^3\varphi\right)d\varphi=\frac{2a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)\,.\end{aligned}$$

(3Z)

Gesamtpunktzahl: 24P + 3Z

Punkte	23,0	22,0	20,5	19,0	18,0	15,5	14,5	13,0	11,0	9,5
Note	1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0	3,3	3,7	4,0

Zur Aufgabe 8: Die Funktion $u(x)$ hat in $x=(0,0,0)$ ein (strenges) Maximum, so dass nach dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen diese Funktion **nicht** harmonisch sein kann.