Analysis für Physiker

18. Übung

1. Man zeige, dass der Durchschnitt beliebig vieler σ-Algebren wieder eine σ-Algebra ist.

2. Beweisen Sie unter Verwendung der drei Axiome (W1)–(W3) einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf einem messbaren Raum $\langle \Omega, \mathcal{F} \rangle$ folgende weitere Eigenschaften ($A, B, A_n \in \mathcal{F}$, $\overline{A} := \Omega \setminus A$):

   (a) $P(\emptyset) = 0\,,$

   (b) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)\,,$

   (c) $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)\,,$

   (d) $P(A) \leq 1\,,$

   (e) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\,,$

   (f) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)\,.$

3. Man zeige:

   (a) Sind $A, B \in \mathcal{F}$ unabhängig, so sind es auch A und $\overline{B}$.

   (b) Sind A und B_1 sowie A und B_2 jeweils unabhängig und gilt $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, dann sind auch A und $B_1 \cup B_2$ unabhängig.

4. Ein (gut aussehender) Mann kommt bei jeder Frau mit der Wahrscheinlichkeit p an. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

   (a) die erste Frau ihn abblitzen lässt, die zweite aber anspringt,

   (b) die zweite Frau anspringt, nachdem ihn die erste hatte abblitzen lassen,

   (c) er nicht mehr als zwei Frau anmachen muss, damit mindestens eine anspringt.

5. Eine Tüte mit 40 Kirschen enthalte 10 madige. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 10 zufällig ausgewählten Kirschen keine madig ist?

6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 3 von 10 Würfen eine 6 zu würfeln?

7. Wieviele Rosinen muss man in den Teig für 10 Brötchen geben, damit mit 99% Wahrscheinlichkeit jedes Brötchen mindestens eine Rosine enthält?

8. Ein Prüfer hat 18 Standardfragen, von denen er 6 zufällig gewählte stellt. Ein Student kennt die Antworten zu 10 Fragen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, die Prüfung zu bestehen, wenn er dazu mindestens 3 Fragen beantworten muss?

9. Die Ausschussrate der Produkte eines Betriebes sei 2%. Ein defektes Teil werde mit 95% Wahrscheinlichkeit aussortiert. Mit 1% Wahrscheinlichkeit sei ein aussortiertes Teil nicht defekt. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein nicht aussortiertes Teil einwandfrei ist.

10. Bei gleichen Symptomen seien 3 Krankheiten K_1, K_2 und K_3 möglich. Im Mittel liege in 5 (bzw. 1 bzw. 2) von 8 Fällen die Krankheit K_1 (bzw. K_2 bzw. K_3) vor. Als Diagnosehilfe wird ein Test durchgeführt, der bei Vorliegen von K_1 (K_2 bzw. K_3) mit der Wahrscheinlichkeit 0.2 (bzw. 0.3 bzw. 0.9) positiv ausfällt.

    (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test positiv ausfällt? Hinweis: totale Wahrscheinlichkeit

    (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Vorliegen der einzelnen 3 Krankheiten für einen Patienten, bei dem der Test negativ ausfiel? Hinweis: Satz von Bayes

11. Drei Männer lieben die gleiche Frau und wollen das Problem durch ein Duell "lösen". Sie sind aber unterschiedlich gute Schützen. Sie treffen jeweils mit 100%, 80% und 50%. Zum Ausgleich vereinbaren sie, dass sie in der Reihenfolge (50%, 80%, 100%) dran sind und reihum jeder sein Ziel frei wählen kann, bis nur noch einer übrig bleibt. Wer hat bei optimaler Strategie aller Beteiligten die größten Chancen? Dazu nehmen wir an, dass die Männer mit der 80- und 100-prozentigen Treffsicherheit jeweils auf den besten verbliebenen Schützen zielen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Überleben des 50-prozentigen Schützen, wenn er zuerst

    (a) auf den mit 100-prozentiger Treffsicherheit zielt,

    (b) auf den mit 80-prozentiger Treffsicherheit zielt,

    (c) mit Absicht daneben schießt (wir nehmen an, dass er das mit 100% schafft).

    Berechnen Sie auch die Überlebenswahrscheinlichkeiten der anderen Schützen für die beste Wahl des 50-prozentigen Schützen.

12. Ein Los in einer bestimmten Lotterie kostet 5 €. Von den Gesamteinnahmen werden 40% für Steuern und den Eigenbedarf der Lotteriegesellschaft verwendet und 60% in Form von Gewinnen wieder ausgeschüttet. Wie groß ist der Erwartungswert des Gewinnes nach dem Kauf eines zufällig ausgewählten Loses?

13. Die Zufallsgröße X habe die Verteilungsfunktion F. Geben Sie die Verteilungsfunktionen der Zufallsgrößen $aX + b$ ($a > 0, b \in \mathbb{R}$ Konstanten) und X^2 an.

14. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz einer auf $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallsgröße.

15. Es seien f_j , $j = 1, 2$, zwei unabhängige Zufallsgrößen mit

    $$P(f_j = k) = (1 - p)^k p\,, \quad k = 0, 1, 2, \dots\,,\ j = 1, 2\,,$$

    wobei $0 < p < 1$. Bestimmen Sie die Verteilung von $\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}^T$ und von $f = \max\{f_1, f_2\}$.

16. Es seien $f_j : \Omega \longrightarrow (0, \infty)$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße $\dfrac{f_1}{f_1 + \cdots + f_n}$.

17. Für das wiederholte Würfeln mit zwei Würfeln berechne man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe "11" vor der Summe "8" fällt.

18. Die Kosten für die Herstellung eines Artikels seien gleich $K > 0$, der Erlös beim Verkauf dieses Artikels gleich $E > K$. Die Nachfrage für diesen Artikel sei eine Zufallsgröße f mit $P(f = k) = p_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Mit $G(a)$ bezeichnen wir den Gewinn, wenn a Exemplare des Artikels hergestellt werden. Für welches a ist der Erwartungswert von $G(a)$ maximal?

19. Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 600-maligem Würfeln mindestens 90 und höchstens 100 Sechsen auftreten.

20. Es seien $f_1, \ldots, f_n$ unabhängige und gleichverteilte Zufallsgrößen in $\{1, 2, \ldots, b\}$ mit unbekanntem $b \in \{1, 2, \ldots\}$. Man gebe ein Konfidenzintervall für b zum Niveau $1 - \alpha$ anhand der Beobachtung von $f = \max\{f_1, \ldots, f_n\}$ an.

21. Es sei f die Anzahl der Misserfolge in einem Bernoulli-Experiment vor dem m-ten Erfolg. Man gebe einen Maximum-Likelihood-Schätzer für die Erfolgswahrscheinlichkeit an.

22. Ein Händler testet beim Kauf eines Paketes mit 100 Glühbirnen, ob dieses weniger als 10 defekte Glühbirnen enthält, indem er 10 Glühbirnen prüft und das Paket nur dann annimmt, wenn alle 10 Glühbirnen in Ordnung sind. Berechnen Sie das Niveau dieses Tests.

23. Geben Sie für $n = 6$ einen randomisierten Neyman-Pearson-Test der "tea testing Lady" mit dem Niveau 0,02 an.

24. $f = (f_1, \ldots, f_n)$ sei Bernoulli-verteilt mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p. Wie groß muss man n wählen, um einen Test φ der Hypothese $p = p_H = 0,2$ gegen die Alternative $p = p_K = 0,8$ mit $\beta_H(\varphi) \leq 0,05$ und $\beta_K(\varphi) \geq 0,95$ zur Verfügung zu haben. Existiert solch ein Test für beliebige $p_H, p_K \in (0,1)$ mit $p_H \neq p_K$?

25. Für eine mit dem Parameter $\lambda > 0$ Poisson-verteilte Zufallsgröße f gebe man den schärfsten nichtrandomisierten Neyman-Pearson-Test der Hypothese $\lambda = 2$ gegen die Alternative $\lambda = 0,5$ zum Niveau $\alpha = 0,2$ an. Gibt es einen nichtrandomisierten schärferen Test zum gleichen Niveau?

26. In einer Kreisscheibe vom Radius $R > 0$ wird ein Punkt zufällig gewählt (Gleichverteilung). Man bestimme die Dichte der Verteilung seines Abstandes vom Mittelpunkt des Kreises.

27. Die Verteilung von $f = (f_1, f_2)$ sei eine Gleichverteilung in $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. Man bestimme die Verteilung von $f_1 + f_2$.