Analysis für Physiker

17. Übung

1. Ermitteln Sie für das System
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1\,,\\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + x_2\,,\end{aligned}$$
d.h.
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ x_1^2\end{bmatrix},$$
die stabile und instabile Mannigfaltigkeit im Nullpunkt. Hinweis: Man betrachte eine äquivalente Integralgleichung und löse diese mittels sukzessiver Approximation. Mit der Startnäherung $u_1^0 = u_2^0 = 0$ bleibt die entstehende Folge ab dem dritten Iterationsschritt stehen. Vgl. auch Bsp. 5.43.

2. Zeigen Sie die Gültigkeit der in Beispiel 5.51 formulierten Aussage. Ermitteln Sie unter Verwendung dieser Tatsache die stabile und instabile Mannigfaltigkeit des nichtlinearen Systems im Beispiel 5.48.

3. Diskutieren Sie das Stabilitätsverhalten der Gleichgewichtspunkte des Systems $\dot{x} = v(x)$. Hinweis: Benutzen Sie das Hartman-Grobman-Theorem oder, falls dieses nicht anwendbar ist, suchen Sie nach einer Ljapunov-Funktion der Gestalt
$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = c_1(x_1 - x_1^0)^2 + c_2(x_2 - x_2^0)^2\,,$$
wobei $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ der zu untersuchende Gleichgewichtspunkt ist.

   (a) $v(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 1\\ 2\,x_2\end{bmatrix}$ (b) $v(x) = \begin{bmatrix} x_2 - x_1^2 + 2\\ 2\,x_2^2 - 2\,x_1x_2\end{bmatrix}$

   (c) $v(x) = \begin{bmatrix} -4\,x_1 - 2\,x_2 + 4\\ x_1x_2\end{bmatrix}$

4. Zeigen Sie mit Hilfe einer Ljapunov-Funktion, dass der Nullpunkt für das System
$$\dot{x} = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} x + F(x)$$
im Falle

   (a) $F(x) = \begin{bmatrix} -x_1^3 - x_1x_2^2\\ -x_2^3 - x_1^2x_2\end{bmatrix}$ asymptotisch stabil, (b) $F(x) = \begin{bmatrix} x_1^3 + x_1x_2^2\\ x_2^3 + x_1^2x_2\end{bmatrix}$ instabil,

   (c) $F(x) = \begin{bmatrix} -x_1x_2\\ x_1^2\end{bmatrix}$ stabil, aber nicht asymptotisch stabil ist.