Analysis für Physiker

16. Übung

1. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$ alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + \lambda^2 y = 0\,,$$

   die den Randbedingungen

   (a) $y(0) = 0\,,\ y(\pi) = 1\,,$ (b) $y(0) = y(\pi) = 1$

   genügen.

2. Für welche reellen Zahlen λ hat das Randwertproblem

$$y''(x) - 2y'(x) + \lambda y(x) = 0\,, \quad y(0) = y(1) = 0$$

   nichttriviale Lösungen?

3. Geben Sie die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < \ell\,,\ t > 0\,,$$

   (a) $u(x,0) = f(x)\,,\ 0 < x < \ell\,,\ u(0,t) = u(l,t) = 0\,,\ t > 0\,,$

   (b) **(HA)** $u(x,0) = f(x)\,,\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0\,,\ u(l,t) = u_0 = \text{const}\,,\ t > 0\,,\ 0 < x < \ell\,,$

   in Form einer Reihendarstellung an (vgl. Beispiel 5.34).

4. Finden Sie eine Reihendarstellung für die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)\,, \quad 0 < x < x_0\,,\ 0 < y < y_0\,,\ t > 0\,,$$

$$u(x,y,0) = f(x,y)\,, \quad t > 0\,,$$

$$u(0,y,t) = u(x_0,y,t) = u(x,0,t) = u(x,y_0,t) = 0\,, \quad 0 < x < x_0\,,\ 0 < y < y_0\,.$$

5. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das Randwertproblem

$$y'' = x^2\,, \quad \alpha y(0) + y'(0) = 1\,,\ y(1) + \alpha y'(1) = \alpha$$

   eindeutig lösbar? Man berechne für diese α die Lösung. Kann man die Lösung mittels einer Greenschen Funktion darstellen?

6. **(HA)** Man löse das Randeigenwertproblem

$$y'' + x^{-1}y' + \lambda x^{-2} y = 0\,, \quad y'(1) = y'\left(e^{2\pi}\right) = 0\,,$$

   d.h., man bestimme alle Eigenwerte und Eigenfunktionen dieses Problems.