Analysis für Physiker

15. Übung

1. In welcher Zeit kühlt sich ein Körper, der auf 100^oC erhitzt wurde, in einem Raum mit der Temperatur von 20^oC bis auf 25^oC ab, wenn er sich in 10 Minuten bis auf 60^oC abkühlt? (Hinweis: Die Geschwindigkeit der Abkühlung ist proportional zur Temperaturdifferenz.)

2. **(HA)** Alamagunther Tropfloch holt eine Flasche Bier aus seinem 7^oC–Kühlschrank, in dem sie schon seit zwei Tagen steht. Er hat sie noch nicht geöffnet, da stürzt sein derangierter Bruder Almansor ins Haus und verstrickt ihn ganze 90 Minuten lang in eine hitzige Diskussion über die Zukunft des Ackerbaus am Nordpol. All das spielt sich in dem Wohnzimmer ab, das der energiebewußte Almagunther auf der patriotischen Temperatur von 19^oC hält. Dem Hausherrn schwant, dass sein vereinsamtes Bier für Christenmenschen zu warm werden wird. Kaum hat Almansor die Haustür zugeschlagen, mißt Almagunther die Temperatur des Gerstensaftes und stellt eine betrübliche Überhitzung desselben auf 15^oC fest. Da er, wie jeder passionierte Biertrinker, das Newtonsche Abkühlungsgesetz kennt, schließt er daraus, dass er Bier mit Zimmertemperatur (19^oC) etwa 3 Stunden lang in seinen Kühlschrank stellen muß, um es auf annehmbare 8^oC zu bringen. Hat er recht?

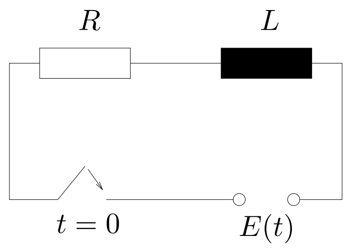
3. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung eines Massepunktes, der mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 von der Erdoberfläche senkrecht nach oben geschossen wird! Nach welcher Zeit erreicht er seine höchste Lage? Wie hoch befindet er sich in diesem Moment?

4. Am Boden eines zylindrischen Gefäßes, welches bis zur Höhe H_0 mit Wasser gefüllt ist, befindet sich eine kleine Öffnung der Fläche q, die vom Zeitpunkt $t = 0$ an proportional zur Zeit geöffnet wird. Wie hoch steht die Flüssigkeit im Zylinder zum Zeitpunkt $t = T$, wenn hier die Öffnung erstmalig vollständig offen ist? (Hinweis: Die Ausflußgeschwindigkeit von Wasser aus einer kleinen Öffnung, die sich in der Tiefe h unterhalb der freien Wasseroberfläche befindet ist gleich $\sqrt{2gh}$ mit der Erdbeschleunigung g.)

5. Die Stromstärke J in einem Stromkreis mit dem Ohmschen Widerstand R, der Selbstinduktion L und der elektromotorischen Kraft E genügt der Differentialgleichung

$$L\frac{dJ}{dt} + RJ = E(t)$$

(R und L konstant). Berechnen Sie $J(t)$, wenn zur Zeit $t = 0$ der Stromkreis geschlossen wird!



   (a) $E(t) = E_0$,

   (b) $E(t) = kt$,

   (c) $E(t)$ beliebig.

6. Bestimmen Sie das Zerfallsgesetz von Radium, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ die Masse

m_0 vorhanden ist. (Die Halbwertzeit von Radium beträgt 1600 Jahre. Die Zerfallsrate ist proportional zur vorhandenen Menge.)

Zusatz: Wie ändert sich das Zerfallsgesetz, wenn pro Zeiteinheit eine konstante Menge zugeführt wird?

7. Lösen Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen:
   (a) $y' = 2xy - x^3 + x$
   (b) $xy' - 2y = 2x^4$
   (c) **(HA)** $y' = (\sin x)(1 - y)$
   (d) **(HA)** $y' + y \sin x = \sin x \cos x$

8. Gegeben seien zwei spezielle Lösungen y_1 und y_2 ($y_1 \neq y_2$) der linearen Differentialgleichung $y' + a(x)y = f(x)$. Bestimmen Sie daraus die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

9. Lösen Sie die Integralgleichungen
   (a) $y(x) = \displaystyle\int_0^x y(t)\, dt + x + 1$, (b) $x^2 + y(x) = \displaystyle\int_a^x t y(t)\, dt$.

10. Ein Käfer befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am unteren Ende eines Baumes der Länge ℓ_0. Dieser Baum wächst gleichmäßig mit Geschwindigkeit v_2. Der Käfer beginnt nun mit konstanter Geschwindigkeit v_1 den Baum nach oben zu krabbeln. Erreicht der Käfer jemals die Spitze des Baumes?

11. Lösen Sie die **Bernoullischen Differentialgleichungen**
   (a) $xy' + y = xy^2 \ln x$, (b) **(HA)** $(x - y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0$.

12. Lösen Sie die **Riccatischen Differentialgleichungen**
   (a) $y' = (1 - x)y^2 + (2x - 1)y - x$, (b) **(HA)** $y' = e^{-x}y^2 + y - e^x$.

13. Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung $y' \sin 2x = 2(y + \cos x)$, die für $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ beschränkt bleibt.

14. Bestimmen Sie (durch Substitution) die allgemeine Lösung von
   (a) $y' = \sqrt{x + y + 1}$, (b) $y' = \dfrac{y}{x} \ln \dfrac{y}{x}$, (c) **(HA)** $y' = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$.

15. **(HA)** Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 6$ unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen
   (a) $y(1) = -3$, (b) $y(1) = -2$.

16. Prüfen Sie, ob folgende Differentialgleichungen **exakt** sind, und bestimmen Sie die allgemeine Lösung, eventuell mit Hilfe eines **integrierenden Faktors**:

(a) $x^3 dx + y^3 dy = 0$

(b) $x^2 - y^2 - 2xyy' = 0$

(c) **(HA)** $\dfrac{2x}{y^3}\, dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}\, dy = 0$

(d) **(HA)** $\left(2xy + x^2y + \dfrac{y^3}{3}\right) dx + (x^2 + y^2)\, dy = 0$

(e) $(3x^2y + 4y^2)\, dx + (4xy - y^3)\, dy = 0$

(f) $(y + xy^2)\, dx + (x - x^2y)\, dy = 0$

17. **(HA)** Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ wird die Differentialgleichung

$$\lambda y(2-x)y' = 3x^2 + y^2$$

exakt? Bestimmen Sie für diese λ eine Integralkurve durch den Punkt $(1,1)$.

18. Man beweise: Die Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ besitzt genau dann einen integrierenden Faktor der Form $\mu = \mu(x)$, wenn sie linear ist.

19. Lösen Sie die folgenden homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten bzw. die entsprechenden Anfangswertprobleme:

(a) $y'' - y' - 6y = 0$

(b) $y'' + 5y' + 4y = 0\,, \quad y(0) = 2\,,\ y'(0) = 1$

(c) $y'' - a^2 y = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$

(d) $y'' - 4y' + 13y = 0$

(e) $y'' + a^2 y = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$

(f) $y'' + 2y' + y = 0\,, \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0$

(g) **(HA)** $y^{(4)} - 2y'' = 0$

(h) **(HA)** $y''' + y'' + y' + y = 0\,, \quad y(0) = y'(0) = 0\,,\ y''(0) = 2$

(i) $y^{(4)} + y = 0$

20. Lösen Sie die folgenden linearen inhomogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (mit der Ansatzmethode):

(a) **(HA)** $y^{(4)} + y = x$

(b) $y'' + 2y' + y = x$

(c) **(HA)** $y''' + 2y'' + y' = 2e^{3x}$

(d) $y''' - y = 6e^{-x}$

(e) $y'' + 4y = x^2 + \cos x$

(f) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$

(g) $y'' - 6y' + 8y = e^{2x}$

(h) $y'' - y = e^x$

21. Lösen Sie mit einem komplexen Ansatz:

    (a) $y'' + y = e^{2x} \cos 3x$

    (b) **(HA)** $y'' + y' + y = e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x$

22. Lösen Sie mit Variation der Konstanten:

    (a) $y''' + 2y'' + y' = 2e^{3x}$

    (b) **(HA)** $y'' + 4y = \cos x$

    (c) $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$

23. Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{u}(t) + 4\dot{u}(t) + 4u(t) = 25 \sin t \,,$$

die den Anfangsbedingungen $u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = 1$ genügt.

24. Lösen Sie mit Hilfe der **Laplace-Transformation** folgende Anfangswertprobleme:

    (a) $y'' - 6y' + 9y = 0 \,, \quad y(0) = 1 \,,\; y'(0) = 0$

    (b) $y'' + 4y' = \cos 2t \,, \quad y(0) = 0 \,,\; y'(0) = 1$

    (c) **(HA)** $y'' - 9y = e^t \,, \quad y(0) = 1 \,,\; y'(0) = 0$

    (d) $y'' + 2y' + y = te^{-t} \,, \quad y(0) = 1 \,,\; y'(0) = 0$

25. Lösen Sie die **Eulerschen Differentialgleichungen**

    (a) $x^2y'' + xy' + 2y = 0 \,,$ (b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = \ln x \,.$

26. Lösen Sie die Differentialgleichungen

    (a) $x^2y'' + xy' - y = x^3 \,,$ (b) $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = x + \dfrac{1}{x} \,.$

27. Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = x + y$, $y(0) = 1$

    (a) **(HA)** mit Produktansatz

    (b) **(HA)** mit Variation der Konstanten

    (c) mit Potenzreihenansatz

    (d) mit integrierendem Faktor

    (e) mit sukzessiver Approximation.

    Zeigen Sie, dass die Folge der Näherungslösungen aus (e) gegen die Lösung konvergiert.

28. Wenden Sie die Methode der sukzessiven Approximation zur Lösung folgender Anfangswertaufgaben an (3 Glieder angeben):

(a) $y' = x - y^2\,, \quad y(0) = 0$

(b) **(HA)** $y' = y^2 + 3x^2 - 1\,, \quad y(1) = 1$

(c) **(HA)** $y' = y + e^{y-1}\,, \quad y(0) = 1$

29. **(HA)** Lösen Sie $y'' + 4y = \cos x$ mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

30. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = Ax$ mit

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, (c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

31. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax\,,\ x(0) = x^0$ für

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
mit Hilfe der Eigenwerte und Eigenvektoren,

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
mit der Ansatzmethode,

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
mit der Eliminationsmethode,

(d) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
mit der Laplace-Transformation.

32. Lösen Sie die Aufgaben 31(a) und 31(b) mit Hilfe der matrixwertigen Exponentialfunktion. Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ an.

33. Lösen Sie

(a) $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (vgl. Aufgabe 31(a)),

(b) $\dot{x} = 4x + y + 36\,t\,, \quad \dot{y} = y - 2x - 2\,e^t\,,$

(c) **(HA)** $\dot{x} = 5x - 3y + 2\,e^{3t}\,, \quad \dot{y} = x + y + 5\,e^{-t}\,.$

34. Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 4x - y\,, \\ \dot{y} &= 3x + y - z\,, \\ \dot{z} &= x + z\,. \end{aligned}$$