Analysis für Physiker

14. Übung

1. Geben Sie die Integrationsgrenzen bei Zurückführung von $\iint_B f(x,y)\,dxdy$ auf ein Doppelintegral an!

   (a) B ist das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$.

   (b) B wird begrenzt durch die Kurven $x=0$, $y=1$, $x=y^2$.

2. Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge und skizzieren Sie das Integrationsgebiet:

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dydx$ (b) $\displaystyle\int_0^2\int_x^{2x} f(x,y)\,dydx$ (c) **(HA)** $\displaystyle\int_1^e\int_0^{\ln x} f(x,y)\,dydx$

3. Berechnen Sie

   (a) $\iint_B (x^2+y)\,dxdy$, wobei B der beschränkte Bereich ist, der von den Parabeln $y=x^2$ und $x=y^2$ begrenzt wird,

   (b) **(HA)** $\displaystyle\iint \left(\frac{x}{y}\right)^2 dxdy$, wobei B von $y=x$, $x=2$ und $xy=1$ begrenzt wird,

   (c) $\iint_B x\,dxdy$, wobei $B=\left\{(x,y) : x^2+(y-1)^2 \le 1,\ y \le -x+2\right\}$.

4. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der von den Ebenen $x+y=1$, $x=0$, $y=0$ und $z=0$ und dem elliptischen Paraboloid $z=2x^2+y^2+1$ begrenzt wird.

5. Schreiben Sie das Integral $\displaystyle\int_0^2\int_0^x f(\sqrt{x^2+y^2})\,dydx$ in Polarkoordinaten um.

6. **(HA)** Leiten Sie die Formel für das Volumen einer Halbkugel her. (Hinweis: Transformation des Integrals auf Kugelkoordinaten)

   (**Z1**) Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt eines Dreiecks (mit konstanter Dichte) der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ist.

   (**Z2**) Es seien I_x und $I_{x'}$ die Trägheitsmomente eines Körpers bezüglich zweier paralleler Achsen x und x', wobei die Achse x durch den Schwerpunkt des Körpers verläuft. Zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehung $I_{x'}=I_x+h^2m$ (Steinerscher Satz), wobei m die Masse des Körpers und h den Abstand der beiden Achsen bezeichnen.

   (**Z3**) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

7. **(HA)** Man berechne mit einem Raumintegral das Volumen des Körpers, der durch die Flächen $x^2+y^2=a^2$ und $x^2+z^2=a^2$ begrenzt wird.

8. Man berechne das Raumintegral $\iiint_B f(x,y,z)dxdydz$ für

   (a) $f(x,y,z) = xyz$, wobei $B \subset \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ begrenzt wird von $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$,

   (b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, wobei B begrenzt wird von der Fläche $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$ und der Ebene $z = c$ $(c > 0)$.

9. **(HA)** Man berechne das Volumen des Körpers, der von der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ aus dem Zylinder $x^2 + y^2 \leq \dfrac{R^2}{4}$ herausgeschnitten wird.

10. Man bestimme die Masse und die Lage des Schwerpunktes der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$, wenn die Dichte in den Punkten der Kugel dem Abstand dieser Punkte vom Koordinatenursprung umgekehrt proportional ist.

11. Ein Körper habe die Form eines Kegelstumpfes mit den Radien a, b, mit $a > b$ und der Höhe h. Berechne das Trägheitsmoment bzgl. seiner Symmetrieachse für die Dichte $\rho \equiv 1$.

12. Berechnen Sie die Masse des Körpers $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2,\ 0 \leq z \leq h\}$, wenn die Dichte gleich $\rho(x,y,z) = e^{x^2+y^2}$ ist.

13. **(HA)** Berechnen Sie die Ladung eines Ellipsoids mit den Halbachsen a, b, c und der Ladungsdichte

$$\rho(x,y,z) = 1 - \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2}\,.$$

   (**Z**) Gegeben sei eine Flasche Bier, stehend auf einem Tischchen im fahrenden Zug. Wie hoch sollte die Bierfüllung sein, damit die Flasche möglichst stabil steht? (Die Form der Flasche sei als Hohlzylinder mit der Höhe h, dem Innenradius R_i und dem Außenradius R_a ohne Berücksichtigung des Bodens angenommen.)

14. Prüfen Sie, ob die folgenden Vektorfelder Potentialfelder in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sind, und bestimmen Sie ggf. das Potential:

   (a) $V_a(x) = \begin{bmatrix} e^{x_1}\sin x_1 & e^{x_1}\cos x_1 \end{bmatrix}^T$

   (b) $V_b(x) = 2\,e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$

   (c) **(HA)** $V_c(x) = \begin{bmatrix} 6\,x_1^2 & 2x_1^2 - x_3 & x_2 \end{bmatrix}^T$

   (d) **(HA)** $V_d(x) = \begin{bmatrix} x_2^2 + x_3^2 & 2\,x_1x_2 & 2\,x_1x_3 \end{bmatrix}^T$

15. Man verwende den Gaußschen Integralsatz (der Ebene) zur Berechnung von

   (a) $\iint_B \dfrac{x^4 - y^4}{x^2y^2}\,dx\,dy$, wobei B die Fläche ist, die von den Kurven $x^2 + y^2 = 10$, $y = 3/x$ und $y = x$ begrenzt wird und die Eckpunkte $P_1(3,1)$, $P_2(\sqrt{5},\sqrt{5})$ und $P_3(\sqrt{3},\sqrt{3})$ hat,

(b) $\displaystyle\oint_\Gamma (\cos x\,\sinh y - x\,y^2)\,dx + (\sin x\,\cosh y + x^2 y)\,dy$, wobei Γ der Kreis $x^2+y^2=a^2$ ist,

(c) **(HA)** $\displaystyle\oint_\Gamma (x\,e^x + \sin y)\,dx + (\sin^2 y + x\,\cos y)\,dy$,
wobei $\Gamma = \big\{(a\,\cos^3 t, a\,\sin^3 t) : 0 \le t \le 2\pi\big\}$ $(a>0)$.

16. Man berechne die Oberfläche des Teils

(a) des Zylinders $2\,z = x^2$, der von den Ebenen $y = x/2$, $y = 2\,x$ und $x = 2\sqrt{2}$ begrenzt wird,

(b) **(HA)** der Fläche $z^2 = 2\,x\,y$ $(z \ge 0)$, der von den Ebenen $x = 0$, $x = a > 0$, und $y = 0$, $y = b > 0$ begrenzt wird,

(c) des Paraboloids $2\,z = \dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b}$ $(a, b > 0)$, der vom Zylinder $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ herausgeschnitten wird.

17. Man berechne den Inhalt der folgenden Zonen auf einer Kugeloberfläche vom Radius R
(β – geografische Breite, λ – geografische Länge):

(a) $\beta_1 \le \beta \le \beta_2$, $-\pi \le \lambda \le \pi$ (b) $0 \le \beta \le \beta_0$, $0 \le \lambda \le \lambda_0$

18. Man zeige, dass für jede geschlossene, stückweise glatte Kurve $C \subset \mathbb{R}^2$ und jede stetige Funktion $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\oint_C f(x^2+y^2)(x\,dx + y\,dy) = 0\,.$$

19. Man berechne (ohne und mit Verwendung des Gaußschen Integralsatzes) das Oberflächenintegral (zweiter Art) $\displaystyle\iint_S v(x)\,d\vec{S}$ für

(a) $v(x) = x$, $S = \big\{(x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = a,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0\big\}$
$(a > 0$, $\langle \vec{n}, e^3 \rangle > 0)$,

(b) $v(x) = x$, $S = \big\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2\big\}$
(Normale $\vec{n}$ nach außen gerichtet),

(c) **(HA)** $v(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 - 1 \end{bmatrix}^T$, $S = \big\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ 0 \le x_3 \le 4\big\}$
$(\langle \vec{n}, e^3 \rangle > 0)$,

(Z1) $v(x) = \begin{bmatrix} x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{bmatrix}^T$, $S = \big\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2\big\}$
(Normale $\vec{n}$ nach außen gerichtet),

(d) $v(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_3 & -10 & x_2^2 \end{bmatrix}^T$, $S = \big\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 100,\ x_3 \ge 5\big\}$
$(\langle \vec{n}, e^3 \rangle > 0)$,

(Z2) $v(x) = x$, S - Oberfläche des Zylinders $\big\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1,\ 0 \le x_3 \le h\big\}$ mit nach außen gerichteter Normale.

20. Man berechne für das Vektorfeld $v(x) = \begin{bmatrix} x_1 e^{x_2} & x_1 e^{x_3} & x_3 e^{x_1} \end{bmatrix}^T$ den Fluss durch die Fläche $S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_2^2 + x_3^2 = a^2,\ -1 \le x_1 \le 1\right\}$, wobei der Normalenvektor nach außen gerichtet sei.

21. **(HA)** Für das Vektorfeld $v(x) = \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & x_3 \end{bmatrix}^T$ berechne man den Fluss durch eine Windung der Schraubenfläche $S = \left\{\begin{bmatrix} r\cos\varphi & r\sin\varphi & \frac{h}{2\pi}\varphi \end{bmatrix}^T : 0 \le r \le a,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\right\}$, wobei für den Normalenvektor $\overrightarrow{n} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{bmatrix}^T$ auf S die Ungleichung $\cos\gamma > 0$ gelte.

22. Man berechne $\oint v(x)\, d\vec{S}$ mit $v(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_2 x_3^2 \end{bmatrix}^T$, wobei S die Oberfläche eines achsenparallelen Würfels der Kantenlänge 2 mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung und nach außen gerichteter Normale ist.

23. Man zeige mit Hilfe des Stokesschen Integralsatzes, dass das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

vom Weg unabhängig ist.

24. Man berechne $\oint_\Gamma x(z-y)dx + y(x-z)dy + z(y-x)dz$, wobei Γ das Dreieck mit den Eckpunkten $A(a,0,0)$, $B(0,a,0)$ und $C(0,0,a)$ (durchlaufen von A über B nach C und zurück nach A) ist,

    (a) unter Benutzung einer Parameterdarstellung von Γ ,

    (b) unter Verwendung des Stokeschen Integralsatzes.

25. (**Z**) Zeigen Sie, dass jedes bezüglich eines Punktes $x^0 \in \mathbb{R}^n$ zentralsymmetrische Vektorfeld der Gestalt $v(x) = f\left(\left\|x - x^0\right\|\right)(x - x^0)$ mit einer stetigen Funktion $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Potential in $\mathbb{R}^n \setminus \left\{x^0\right\}$ besitzt, und geben Sie dieses an.