Analysis für Physiker

13. Übung

1. Berechnen Sie
   (a) $\int_\Gamma x_1 x_2 x_3 \, ds$, wobei $\Gamma \left\{ (x_1, x_2, x_3) = \left(t, \frac{1}{3}\sqrt{8\,t^3}, \frac{1}{2}\,t^2 \right) : 0 \le t \le 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$,
   (b) $\int_\Gamma \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, ds$, wobei $\Gamma = \{(x_1, x_2) = (e^\varphi \cos\varphi, e^\varphi \sin\varphi) : 0 \le \varphi \le 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2$,
   (c) **(HA)** die Länge eines Stücks $\{(a\,t\cos t, a\,t\sin t) : 0 \le t \le 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2$ der Archimedesschen Spirale.

2. **(HA)** Berechnen Sie die Länge des Weges, den ein Punkt P auf der Peripherie einer kreiszylindrischen Schraube mit Radius r und Ganghöhe $2\pi c$ beim Drehen der Schraube zurücklegt, wobei die Schraube eine zweimalige Volldrehung ausführen soll.

3. Man berechne die Masse des Bogens der Kurve $y = \ln x$ zwischen den Punkten mit den Abszissen $x_1 > 0$ und $x_2 > x_1$, wenn die Dichte der Kurve in jedem Punkt gleich dem Quadrat seiner Abszisse ist.

4. Berechnen Sie folgende Kurvenintegrale zweiter Art:
   (a) $\int_\Gamma (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$ mit $\Gamma = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$,
   (b) **(HA)** $\int_\Gamma (-y\,dx + x\,dy)$, wobei $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ der Polygonzug von $(0,0)$ über $(1,0)$ nach $(1,1)$ ist.

5. Man bestimme den Wert des Kurvenintegrals $I = \int_\Gamma 2xy\,dx + x^2\,dy$ entlang des Weges $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, der die Punkte (0,0) und (1,1) über
   (a) die Gerade $y = x$,
   (b) die Parabel $y = x^2$,
   (c) die Parabel $y^2 = x$,
   (d) die kubische Parabel $y = x^3$

   verbindet.

6. Man berechne $I = \int_\Gamma xy\,dx + (y-x)\,dy$ entlang der Integrationswege aus Aufgabe 5.

7. Berechnen Sie $\int_\Gamma (y+3z)\,dx + (2z+x)\,dy + (3x+2y)dz$, wobei

$$\Gamma = \left\{ (x,y,z) = \left(a\cos\varphi, a\sin\varphi, \frac{2a\varphi}{\pi} \right) : 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \right\} \subset \mathbb{R}^3 .$$

8. **(HA)** Gegeben seien die Kraftfelder (a) $F(x,y) = (x+y, 2x)$ und (b) $F(x,y) = (x+y, x)$. Berechnen Sie die Arbeit bei der Verschiebung eines Massenpunktes längs der Einheitskreislinie $\{(\cos t, \sin t) : 0 \leq t \leq 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2$. Wie kann für das Kraftfeld (b) die Arbeit längs einer beliebigen stückweise glatten Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ berechnet werden?

9. Unter Wirkung des Kraftfeldes $F(x,y) = (2xy, x^2 + y^2)$ bewege sich ein Massenpunkt auf der Parabel $y = x^2$ vom Punkt $(1,1)$ zu dem Punkt $(2,4)$. Welche Arbeit wird hierbei geleistet?

10. Berechnen Sie

$$\int_\Gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2 + 1},$$

wobei $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ Rand des kleinen Kreissegmentes ist, das durch $x + y = 1$ und $x^2 + y^2 = 1$ begrenzt wird.