Analysis für Physiker

12. Übung

1. Zeigen Sie, dass die Möbiustransformationen (d.h. die gebrochen-linearen Abbildungen $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc \neq 0$) bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe bilden.

2. In welche Figuren gehen folgende Mengen bei der Abbildung $f(z) = (\overline{z})^{-1}$ (Spiegelung am Einheitskreis) über?

   (a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}\ , \quad r > 0\,,$

   (b) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}\ ,$

   (c) **(HA)** $\{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, z = 1\}\ ,$

   (d) **(HA)** eine beliebige Gerade durch $z_0 \neq 0\,.$

3. Man bestimme das Bild

   (a) von $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ bei der Abbildung $w = \dfrac{z}{1-z}\,,$

   (b) **(HA)** der rechten Halbebene bei der Abbildung $w = \dfrac{1-z}{1+z}\,,$

   (c) des 1. Quadranten bei der Abbildung $w = \dfrac{\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}}$

4. Für die Abb. $w = \dfrac{z-\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}}$ bestimme man das Bild

   (a) der reellen Achse,

   (b) der imaginären Achse,

   (c) **(HA)** des Einheitskreises

   und alle Fixpunkte.

5. Bestimmen Sie eine Abbildung $w = az + b$ mit dem Fixpunkt $1 + 2\mathbf{i}$, die den Punkt $\mathbf{i}$ in den Punkt $-\mathbf{i}$ überführt.

6. Geben Sie die allgemeine Form einer gebrochen linearen Abbildung an, die den Einheitskreis auf die untere Halbebene abbildet.

7. Man bestimme eine gebrochen lineare Abbildung $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, die die Punkte

   (a) -1, $\mathbf{i}$, $1+\mathbf{i}$ in die Punkte 0, $2\mathbf{i}$, $1-\mathbf{i}$

   (b) **(HA)** -1, P_∞, $\mathbf{i}$ in die Punkte P_∞, $\mathbf{i}$, 1

   überführt.