Analysis für Physiker

11. Übung

1. Man untersuche die Funktionen $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ anhand der Definition auf Differenzierbarkeit!

   (a) $f(z) = 5\mathbf{i}$ (b) $f(z) = z$ (c) $f(z) = \overline{z}$ (d) $f(z) = 3\,\mathsf{Re}\,z$

2. Sind folgende Funktionen differenzierbar? Man berechne gegebenenfalls die Ableitung!

   (a) $f(z) = z\,\overline{z}$ (b) $f(z) = z^2\overline{z}$ (c) $f(z) = \mathsf{Im}\,z$

   (d) $f(z) = e^x(\cos y + \mathbf{i}\sin y)$ $(z = x + \mathbf{i}y)$

3. Für welche Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ sind folgende Funktionen ganze Funktionen? $(z = x+iy)$

   (a) $f(z) = x + a\,y + \mathbf{i}(b\,x + c\,y)$

   (b) $f(z) = \cos x\,(\cosh y + a\sinh y) + \mathbf{i}\,\sin x\,(\cosh y + b\sinh y)$

4. Man entwickle folgende Funktionen in $z_0 \in \mathbb{C}$ in eine Potenzreihe:

   (a) $f(z) = e^z\,,\ z_0 = \pi\mathbf{i}$

   (b) $f(z) = \dfrac{1}{z - \mathbf{i}}\,,\ z_0 = 0$

   (c) $f(z) = \dfrac{1}{(z - \mathbf{i})^3}\,,\ z_0 = -\mathbf{i}$

   (d) **(HA)** $f(z) = \dfrac{2z + 1}{(z^2 + 1)(z + 1)^2}\,,\ z_0 = 0$ (Hinweis: Partialbruchzerlegung)

5. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Reihen? Man gebe im Falle der Konvergenz die Summe der Reihe an!

   (a) $1 + (2z + 1) + (2z + 1)^2 + \cdots$

   (b) $1 + 2\dfrac{z-1}{z+1} + 2\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2 + \cdots$

6. Zeigen Sie, dass für die Funktionen $\sinh z := \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ und $\cosh z := \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ die Darstellungen $\sinh z = -\mathbf{i}\,\sin\mathbf{i}z$ bzw. **(HA)** $\cosh z = \cos\mathbf{i}z$ gelten.

7. Die Reihendarstellungen von e^z, $\cos z$ und $\sin z$ sowie das Potenzgesetz $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ werden als bekannt vorausgesetzt. Man zeige, dass $e^{\mathbf{i}z} = \cos z + \mathbf{i}\sin z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt und leite die Formeln $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ sowie $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$ her!

   Zusatz: Zeigen Sie, dass $f(z) = \sin z$ und $g(z) = \cos z$ nur reelle Nullstellen haben.

8. Sei $f(z) = u(z) + \mathbf{i}\,v(z) = \rho(z)e^{\mathbf{i}\theta(z)}$ eine holomorphe Funktion im Gebiet G. Man beweise: Wenn eine der Funktionen $u, v, \rho, \theta : G \longrightarrow \mathbb{R}$ konstant ist, so ist auch $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ konstant.

9. Man zeige: Wenn $f(z)$ im Gebiet G holomorph ist und $f'(z) = 0$ in G gilt, so ist $f(z)$ in G konstant.

10. Sei $z = re^{\mathbf{i}\varphi}$ und $f(z) = u(r,\varphi) + \mathbf{i}\, v(r,\varphi)$. Man schreibe die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für Polarkoordinaten auf.

11. Sei $z = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Man zeige die Gültigkeit folgender Formeln:

    (a) $\mathsf{Re}\,\sin z = \sin x \cosh y$

    (b) **(HA)** $|\sin z| = \sqrt{(\sinh y)^2 + \sin^2 x}$

    (c) **(HA)** $\mathsf{Im}\,\sin z = \cos x \cdot \sinh y$

    (d) $\cos z = \cos x \cosh y - \mathbf{i} \sin x \sinh y$

12. Auf welchen Teilmengen der komplexen Zahlenebene sind die Funktionen $f_1(z) = e^z$ $f_2(z) = \cos z$, **(HA)** $f_3(z) = \sin z$ reellwertig? Man berechne

$$f_1\left(\frac{\pi}{2}(1+\mathbf{i})\right), \quad f_2(\pi + \mathbf{i}), \quad (\mathbf{HA})\ f_3(2\mathbf{i}).$$

13. Man bestimme (für $k \in \mathbb{Z}$ fixiert) das Bild des Gebietes

$$G_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2}(2k-1) < \mathsf{Re}\, z < \frac{\pi}{2}(2k+1) \right\}$$

    bei der Abbildung $w = f(z) = \sin z$.

    <u>Zusatz</u>: Ist $f : G_k \longrightarrow \mathbb{C}$ eineindeutig?

14. Unter einem (natürlichen) Logarithmus einer komplexen Zahl z versteht man eine komplexe Zahl w mit der Eigenschaft $z = e^w$. Man bestimme alle (natürlichen) Logarithmen sowie den Hauptwert des Logarithmus von $z_1 = \mathbf{i}$ und $z_2 = (1+\mathbf{i})^3$.

15. Man bestimme das Bild D' des Gebietes D bei der Abbildung $f(z)$.

    (a) $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, z > 0\}$, $f(z) = z^2$

    (b) $D = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \mathsf{Im}\, z < 0\}$, $f(z) = e^z$.

    (c) **(HA)** Welches Gebiet D_n wird bei der Abbildung $w = z^n$ $(n \in \mathbb{N})$ auf die "geschlitzte" Ebene $\mathbb{C}' = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ eineindeutig abgebildet?

16. Gibt es eine in einer Umgebung des Nullpunktes analytische Funktion, die in den Punkten $z_n = \frac{1}{n}$ folgende Werte annimmt? (Hinweis: Identitätssatz)

    (a) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \ldots$ (b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

17. Welche der folgenden Funktionen sind ganze Funktionen?

    (a) $\sin \overline{z}$ (b) **(HA)** $\sin |z|$ (c) $\overline{\sin \overline{z}}$

18. Man berechne

(a) $\displaystyle\int_\alpha^\beta z\,dz$, (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi\mathbf{i}} e^z\,dz$, (c) $\displaystyle\int_0^{(1+\mathbf{i})\pi} \cos z\,dz$,

(d) **(HA)** $\displaystyle\int_K z\overline{z}dz$, wobei K die geradlinige Verbindung von 0 nach $1+\mathbf{i}$ ist.

19. Man berechne unter Verwendung der Cauchyschen Integralformel das Integral

$$I_K := \int_K \frac{dz}{1+z^2},$$

wenn K positiv orientiert und durch folgende Gleichungen gegeben ist:

(a) $|z-\mathbf{i}|=1$ (b) $|z+\mathbf{i}|=1$ (c) **(HA)** $|z|=2$

20. Man berechne

(a) $\displaystyle\int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3}$, (b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+\mathbf{i}}$, (c) $\displaystyle\int_{|z+2\mathbf{i}|=3} \frac{dz}{z^2+\pi^2}$,

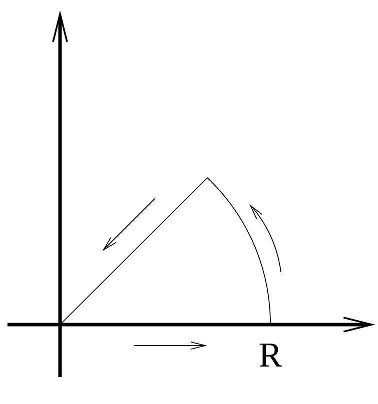
(d) **(HA)** $\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{1-z}dz}{z^3(1-z)}$, (e) **(HA)** $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$,

(f) **(HA)** $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^m}$ $(n, m \in \mathbb{N},\ |a| < r < |b|)$.

21. Man berechne die Fresnelschen Integrale

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \sin x^2\,dx$$

mittels Integration der Funktion $f(z) = e^{\mathbf{i}\,z^2}$ entlang der in der Abbildung angegebenen Kurve und Grenzübergang $R \longrightarrow \infty$.



22. Man zeige, dass der Wertebereich $\{f(z) : z \in \mathbb{C}\}$ einer nicht konstanten, ganzen Funktion $f(z)$ dicht in $\mathbb{C}$ ist. (Hinweis: Satz von Liouville)

23. Man beweise folgende Verallgemeinerung des Satzes von Liouville: Ist $f(z)$ eine ganze Funktion und existieren Konstanten $c > 0$ und $R > 0$, so dass $|f(z)| \leq c|z|^m \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus U_R(0)$, so ist $f(z)$ ein Polynom, dessen Grad außerdem nicht größer als m ist.

24. Man entwickle die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ in folgenden Gebieten in eine Laurentreihe:

    (a) $0 < |z| < 1$ (b) $0 < |z-1| < 1$ (c) $1 < |z| < \infty$

25. Man entwickle die Funktion $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ in folgenden Gebieten in eine Laurentreihe:

    (a) $1 < |z| < 2$ (b) $2 < |z| < \infty$ (c) $0 < |z-2| < 1$ (d) $0 < |z-1| < 1$

26. Man entwickle folgende Funktionen an ihren singulären Stellen in eine Laurentreihe. Man gebe das Konvergenzgebiet der Reihen an!

    (a) $f_1(z) = e^{(1-z)^{-1}}$ (b) $f_2(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2}$ (c) $f_3(z) = e^{-z^{-2}}$ (d) $f_4(z) = \dfrac{\sin z}{z}$

27. Man charakterisiere für die Funktionen der Aufgaben 24, 25 und 26 die singulären Stellen (Polstelle, hebbare oder wesentliche Singularität) und ermittle die Residuen an diesen Stellen.

28. Man berechne möglichst effektiv die Residuen von $f(z)$ an den angegebenen Stellen

    (a) $f(z) = \dfrac{1}{(z+3)(z-5)^2}$, $z_1 = -3$, $z_2 = 5$

    (b) $f(z) = (\sin z - \cos z)^{-1}$, $z_0 = \dfrac{\pi}{4}$

    (c) $f(z) = \sin \dfrac{1}{1-z}$, $z_0 = 1$

    (d) $f(z) = \dfrac{1}{1-e^z}$, $z_0 = 0$

    (e) $f(z) = \dfrac{1}{1+z-e^z}$, $z_0 = 0$

29. Man berechne folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

    (a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\, dz$ (b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\mathbf{i}\cot z}{z(z-1)}\, dz$ (c) $\displaystyle\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{1-z}}{z(1-z)}\, dz$

30. Man berechne folgende uneigentlichen (reellen) Integrale:

    (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\, dx$