Analysis für Physiker

10. Übung

1. Sind folgende Abbildungen $d : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto d(x, y)$ Metriken auf $\mathbf{X}$?
   (a) $\mathbf{X} = \mathbb{R}$, $d(x, y) = \sin^2(x - y)$,
   (b) $\mathbf{X} = \mathbb{N}$, $d(x, y) = \dfrac{|x - y|}{x \cdot y}$,
   (c) $\mathbf{X} = \mathbf{s}$ - Menge aller komplexen Zahlenfolgen,
   $$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|}, \quad x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}, \ y = (\eta_n)_{n=1}^{\infty}.$$

2. Von folgenden Mengen $A \subset \mathbb{R}$ bestimme man die Menge der Häufungspunkte A' und die Abschließung $\overline{A}$ bezüglich der Metrik $d(x, y) = |x - y|$:
   (a) $A = \mathbb{N}$, (b) **(HA)** $A = (0, 1) \cup (1, 2)$, (c) $A = \left\{ \dfrac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$,
   (d) **(HA)** $A = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}, \frac{2n}{n+1} \right\}$, (e) **(HA)** $A = \left\{ \frac{2n-3}{3n+2} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

3. Es sei $(\mathbf{X}, d)$ ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass $(\mathbf{X} \times \mathbf{X}, d_\infty)$ mit $d_\infty((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}$ eine metrischer Raum und $d : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung sind.

4. Es sei $(\mathbf{V}, \|.\|)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass dann $\|.\| : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ eine stetige Abbildung ist.

5. Man zeige: Die algebraischen Operationen in einem normierten Raum sind stetige Abbildungen, d.h., man zeige, dass aus $x_n \longrightarrow x$ und $y_n \longrightarrow y$ in $(\mathbf{V}, \|.\|)$ und $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ in $(\mathbb{R}, |.|)$ folgt $x_n + y_n \longrightarrow x + y$ und $\lambda_n x_n \longrightarrow \lambda x$ in $\mathbf{V}$.

6. Man zeige, dass $\mathbf{c}$ ein abgeschlossener Teilraum von ℓ^∞ ist.

7. Es seien $(\mathbf{U}, \|.\|_a)$ ein Banachraum und $(\mathbf{U}, \|.\|_b)$ ein normierter Raum. Ferner mögen zwei positive Konstanten c_1, c_2 existieren, so dass $c_1 \|x\|_b \le \|x\|_a \le c_2 \|x\|_b$ für alle $x \in \mathbf{U}$ gilt. (Man sagt, die beiden Normen sind zueinander äquivalent.) Man zeige, dass dann auch $(\mathbf{U}, \|.\|_b)$ ein Banachraum ist.

8. Berechnen Sie die Normen der folgenden Operatoren $A : \mathbf{C}[0, 1] \longrightarrow \mathbf{C}[0, 1]$, wobei die Norm im Raum der komplexwertigen stetigen Funktionen $\mathbf{C}[0, 1]$ definiert sei durch
   $$\|x\| = \|x\|_\infty = \max\{|x(t)| : t \in [0, 1]\}.$$
   (a) $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^t x(s)\, ds$, (b) **(HA)** $(Ax)(t) = t\, x(t)$, (c) $(Ax)(t) = t^2 x(0)$.

9. Man zeige, dass ein linearer Operator $A : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{V}$ zwischen zwei normierten Räumen $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$ genau dann eine stetige Abbildung realisiert, wenn er beschränkt ist.

10. **(HA)** Auf $[-1, 1]$ definieren wir die Funktionen $U_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, durch

$$U_n(\cos s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\sin(n+1)s}{\sin s} \,.$$

Man zeige, dass $U_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades ist (das n-te Tschebyscheff-Polynom zweiter Art, vgl. Abschnitt 0.12, Aufgabe 11) und dass $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ ein Orthonormalsystem bezüglich des Skalarproduktes $\langle u, v \rangle = \int_{-1}^{1} u(x)\overline{v(x)}\sqrt{1-x^2}\, dx$ ist.

11. Den Raum ℓ^1 der absolut summierbaren Zahlenfolgen $x = (\xi_n)_{n=0}^{\infty}$ versehen wir mit der Norm $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|$. Zeigen Sie, dass $(\ell^1, \|.\|_1)$ ein Banachraum ist.