Analysis für Physiker

9. Übung

1. Man untersuche die Funktionenfolgen (f_n) auf gleichmäßige bzw. punktweise Konvergenz:

   (a) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$, $-\infty < x < \infty$, (b) **(HA)** $f_n(x) = \sin\dfrac{x}{n}$, $-\infty < x < \infty$,

   (c) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$, $x \in [0,1]$, (d) $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1-\varepsilon]$, $(\varepsilon > 0)$

   (e) $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$.

2. Untersuchen Sie folgende Reihen auf punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $x \in [-q, q]$ mit $q < 1$, (b) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $x \in (-1, 1)$,

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$, $x \in [-1, 1]$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in [a, b]$.

3. Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}(z-1)^n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$, (c) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^n + b^n}$, $(a, b > 0)$,

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{n!}$, (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{2^n}$, (f) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1 + 2\cos\frac{n\pi}{4})^n}{\ln n} z^n$.

4. Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Potenzreihe und geben Sie den Konvergenzradius dieser Reihe an:

   (a) $f(x) = e^{-x^2}$

   (b) $f(x) = \sinh x$

   (c) **(HA)** $f(x) = \sin x \cos x$

   (d) **(HA)** $f(x) = a^x$

   (e) $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$

   (f) $f(x) = \ln(1 + x + x^2 + x^3)$
   Hinweis: geom. Summenformel

5. Man stelle durch eine Reihe dar:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\, dt$, (b) **(HA)** $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$, (c) $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

6. Ermitteln Sie die Summe und den Konvergenzbereich folgender Reihen (Hinweis: gliedweise Integration, um bekannte Reihen zu erhalten):

   (a) $1 - 3x^2 + 5x^4 - \ldots$, (b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \ldots$,

   Soweit nicht anders angegeben, beziehen sich die folgenden Aufgaben auf Fourierreihen der Gestalt

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\,.$$

7. Zeigen Sie: Bei einer π-periodischen Funktion verschwinden die Fourierkoeffizienten mit ungeraden Indizes.

8. Seien f und $\widetilde{f}$ 2π-periodisch. In welchem Zusammenhang stehen die Fourierkoeffizienten a_n , b_n von f und $\widetilde{a}_n$, $\widetilde{b}_n$ von $\widetilde{f}$, wenn gilt

   (a) **(HA)** $\widetilde{f}(x) = f(-x)$, (b) $\widetilde{f}(x) = f(x+h)$ $(h = \text{const})$?

9. Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Fourierreihe:

   (a) $f(x) = |\cos x|$, (b) $f(x) = \begin{cases} \pi + x & : \quad -\pi \le x \le 0\,, \\ \pi - x & : \quad 0 < x < \pi\,, \end{cases}$ (2π-periodisch).