Analysis für Physiker

8. Übung

1. Verwenden Sie Folgerung 1.6:

   (a) Es seien $c > 0$, $x_1 \in \left(0, c^{-1}\right)$ und $x_{n+1} = x_n(2 - c\,x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Existiert $\lim_{n\to\infty} x_n$? Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

   (b) Es seien $0 \le a_1 < b_1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ und $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$ Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ denselben Grenzwert haben.

2. Geben Sie alle partiellen Grenzwerte von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ an:

   (a) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1-(-1)^n}{2}$, (b) $a_n = n^{(-1)^n}$, (c) **(HA)** $a_n = \dfrac{2}{n} + \cos\dfrac{\pi n}{2}$.

3. Es seien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent und $p > 1$. Zeigen Sie, dass dann auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ konvergiert.

4. Man zeige: Sind $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ konvergent, so konvergieren auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ und **(HA)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^2$.

5. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz (Hinweis: Majoranten- und Vergleichskriterien, Leibnizkriterium):

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}}$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [\ln(n+1) - \ln n]$, (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(\arctan n)^n}{2^n}$,

   (d) **(HA)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n^2}$, (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1}$, (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$,

   (g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{3} - 1\right)$, (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$, (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{\alpha}{n}$ $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$,

   (j) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(n-1)}$, (k) **(HA)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{2n^3-1}$, (l) **(HA)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$,

   (m) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n \ln n}$, (n) **(HA)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^3}$, (o) **(HA)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, (p) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$,

   (q) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\ln(\ln n)}}$, (r) **(HA)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$, (s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\dfrac{\alpha}{n}$ $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Bitte wenden!

6. Untersuchen Sie folgende Reihen mit Hilfe des Wurzel- oder Quotientenkriteriums auf Konvergenz, gegebenfalls mit Fallunterscheidungen bezüglich $\alpha \in \mathbb{R}$:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2^n}$, (c) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-(-1)^n}{2^n}$, (d) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\alpha}{3^n}$,

(e) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{\alpha}{n}\right)^n$, (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 5^n}{(2n)!}$, (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$,

(i) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n}$, (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$, (k) **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{n-1}$.