Analysis für Physiker

7. Übung

1. Man berechne folgende Integrale:

   (a) $\iint_{R_1} x\,dR_1\,,\quad R_1 = (0,3)\times(0,2)\,,$

   (b) $\iint_{R_2} \left(x^2 + e^y\right)\,dR_2\,,\quad R_2 = (-1,1)\times(0,2)\,,$

   (c) $\iint_{\Omega} x\,y\,d\Omega\,,\quad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 < x < 2,\, -x < y < 1+x\right\}\,,$

   (d) $\iint_{\Sigma} \left(x^4 y + 3\right)\,d\Sigma\,,\quad \Sigma = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1 < x < 1,\, x^2 < y < 1\right\}\,,$

   (e) $\iint_{B} \left(5 - x^2 - y^2\right)\,dB\,,\quad B = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\right\}\,.$

2. Man berechne den Flächeninhalt des Vierecks, welches von den Geraden $y = a_1 x$, $y = a_2 x$, $y = 1 - b_1 x$ und $y = 1 - b_2 x$ berandet wird, wobei $0 < a_1 < a_2$ und $0 < b_1 < b_2$ gelte.

3. Man berechne mittels eines Flächenintegrals das Volumen

   (a) des Körpers $K_1 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in(0,1)\times(0,2),\, 0 < z < 2 - x\,y\right\}\,,$

   (b) des Kegels $K_2 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z^2,\, 0 < z < 1\right\}\,,$

   (c) der Pyramide mit den Eckpunkten $(0,0,0)$, $(H,0,0)$, $(H,a,0)$, $(H,0,b)$ und (H,a,b) , wobei H , a und b positive Zahlen sind,

   (d) des Ellipsoiden $E = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} < 1\right\}$ mit den Halbachsen $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$,

   (e) der Kugelkappe $S = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1,\, \dfrac{1}{2} < z < 1\right\}\,.$

   Falls möglich berechne man die Volumina auch über die Formel für das Volumen von Rotationskörpern (Abschnitt 0.13.3).

4. Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes

   (a) der Astroide mit dem Parameter $a > 0$ (vgl. Aufgabe 3a, Abschnitt 0.16),

   (b) des Bogens der Astroide aus Aufgabe 3a, Abschnitt 0.16, der im ersten Quadranten liegt,

   (c) des Bogens der Zykloide aus Aufgabe 3b, Abschnitt 0.16,

   (d) der Kardioide aus Aufgabe 3c, Abschnitt 0.16.