

## Analysis für Physiker

### 6. Übung

1. Berechnen Sie die nachstehenden uneigentlichen Integrale bzw. zeigen Sie ihre Divergenz:

(a)  $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda} \quad (\lambda \in \mathbb{R}, a > 0),$

(e)  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln x},$

(b) **(HA)**  $\int_0^b \frac{dx}{x^\mu} \quad (\mu, b > 0),$

(f) v.p.  $\int_{1/2}^2 \frac{dx}{x \ln x},$

(c) **(HA)**  $\int_a^\infty \sin x \, dx,$

(g)  $\int_{-\infty}^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2} \, dx,$

(d) **(HA)**  $\int_0^\infty e^{-kx} \, dx \quad (k > 0),$

(h) v.p.  $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x}.$

2. Untersuchen Sie die Konvergenz von

(a) **(HA)**  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1},$  (b)  $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}},$  (c)  $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x} \, dx,$  (d)  $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}.$

3. Berechnen Sie die Länge ( $a > 0$  fest gewählt)

(a) der Astroide ( $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi$ ),

(b) eines Bogens der Zykloide ( $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$ ),

(c) **(HA)** der Kardioide ( $r = a(1 + \cos \varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ).

4. Berechnen Sie folgende Kurvenintegrale

(a)  $\int_\Gamma (x^2 + y^2) \, ds, \quad \Gamma : \text{Strecke von } (a, a) \text{ bis } (b, b),$

(b)  $\int_\Gamma y \, ds, \quad \Gamma : \text{Parabelbogen } y^2 = 2px \text{ von } (0, 0) \text{ bis } (1, \sqrt{2p}),$

(c) **(HA)**  $\int_\Gamma xy \, ds, \quad \Gamma = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\},$

(d) **(HA)**  $\int_\Gamma \sin(2x) \, ds, \quad \Gamma : \text{Cosinuskurve von } x = 0 \text{ bis } x = t.$

5. Ermitteln Sie das Volumen des Rotationsellipsoids, das bei Drehung der Ellipse

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

um die  $x$ -Achse entsteht.

6. Es sei  $-r \leq x_1 < x_2 \leq r$ . Das zwischen  $x = x_1$  und  $x = x_2$  liegende Stück des Halbkreises  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  werde um die  $x$ -Achse gedreht. Man gebe die Mantelfläche des Rotationskörpers an.

7. Ein Malermeister beauftragt seinen Lehrling, den unendlichen Trichter, der bei Rotation von

$$z = \frac{1}{y} \quad (1 \leq y < \infty)$$

um die  $y$ -Achse entsteht, rot einzufärben! Der intelligente Lehrling überlegt zuerst, ob er den Zylinder anstreicht oder mit Farbe füllt! Wie entscheidet er sich und warum?

8. Berechnen Sie die Länge der Kurve

$$x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \sin t, \quad z = e^{-t} \quad (0 \leq t \leq \infty).$$

9. **(HA)** Man ermittle den Schwerpunkt des Kreisbogenstücks aus Aufgabe 6 für den Fall  $x_1 = -x_2$ .

10. Berechnen Sie den Schwerpunkt des Flächenstücks, das von den Kurven (bzw. Geraden)  $y = 0$ ,  $x = 1$  und  $y = \sqrt{2x}$  begrenzt wird.