Analysis für Physiker

5. Übung

1. Ermitteln Sie folgende unbestimmte Integrale (ggf. Gültigkeitsbereich der Stammfunktion angeben):

   (a) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}-1}{e^x-1}\,,dx$ (c) **(HA)** $\displaystyle\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx\,,$

   (d) **(HA)** $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx\,.$

2. Bestimmen Sie mit Hilfe von Substitutionen:

   (a) **(HA)** $\displaystyle\int (3x+4)^2\,dx\,,$ (b) $\displaystyle\int x^2\sqrt[3]{x^3-8}\,dx\,,$ (c) **(HA)** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,,$

   (d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx\,,$ (e) **(HA)** $\displaystyle\int \tan x\,dx\,,$ (f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}\,,$ (g) **(HA)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}\,,$

   (h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}\,,$ (i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+13}\,,$ (j) **(HA)** $\displaystyle\int \frac{e^x}{2+e^x}\,dx\,.$

3. Berechnen Sie mittels partieller Integration:

   (a) $\displaystyle\int x^2 e^{-2x}\,dx\,,$ (b) **(HA)** $\displaystyle\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx\,,$ (c) **(HA)** $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx\,,$

   (d) $\displaystyle\int \arctan x\,dx\,,$ (e) **(HA)** $\displaystyle\int \ln x\,dx$ (f) $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx$ $(a,b\neq 0)$

   (g) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$ (h) $\displaystyle\int \sin^2 x dx.$

4. Ermitteln Sie $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \arctan t\,dt\,.$

5. **(HA)** Welches Vorzeichen hat $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx$? (Das Integral muss nicht berechnet werden.)

6. Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels Partialbruchzerlegung:

   (a) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx\,,$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx\,,$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}\,,$

   (d) **(HA)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}\,.$

7. Ermitteln Sie folgende Integrale durch Überführung in Integrale über rationale Funktionen mittels geeigneter Substitutionen:

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{5+3\cos x}\,,$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x}\,,$ (c) **(HA)** $\displaystyle\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}\,,$

(d) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx\,,$ (e) **(HA)** $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx\,.$

8. Wie man leicht sieht, gilt $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,,dx = 2\,.$ Substituiert nun $t = \sin x\,,\ dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\,,$ so folgt $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx = \int_0^0 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 0\,.$ Wo steckt der Fehler?

9. Die Form einer durchhängenden Kette wird durch $f(x) = \cosh x$ beschrieben. Berechnen Sie die Länge einer Kette, die zwischen den Stellen $x = -a$ und $x = a$ aufgehängt ist.

10. Zeigen Sie die Gültigkeit der Abschätzung

$$\frac{1}{2} \leq \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

11. Die Tschebyscheff-Polynome erster Art sind durch

$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,,\quad T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\cos(n\arccos x)\,,\ n = 1,2,\dots\,,$$

definiert, wobei $-1 \leq x \leq 1$ ist. Man zeige, dass

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \delta_{nm}\,,\qquad n,m = 0,1,2,3,\dots\,,$$

gilt.

12. Leiten Sie eine Rekursionsformel für das Integral $S_n := \displaystyle\int \sin^n x\,dx$ her.