Analysis für Physiker

4. Übung

1. Man bestimme alle partiellen Ableitungen erster Ordnung folgender Funktionen:

   (a) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (s,t) \mapsto s^2 t - e^{s\,t}\,,$

   (b) $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (\xi_1,\xi_2) \mapsto \sin(\xi_1^2\,\xi_2^5)\,,$

   (c) $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (s,t) \mapsto \sqrt{s^2+t^3}\,,$

   (d) $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (\xi_1,\xi_2,\xi_3) \mapsto \xi_1^2 + \xi_2^5 + \xi_1\,\xi_3^3 + 2\,,$

   (e) $f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (x,y) \mapsto x^y\,,$

   (f) **(HA)** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (s,t) \mapsto s\,e^t\,,$

   (g) **(HA)** $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (u,v) \mapsto \sin(u^2+v^3)\,,$

   (h) **(HA)** $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,, (s,t) \mapsto e^s \cos(s\,t) + \dfrac{s}{1+t^2}\,.$

2. Man zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad (s,t) \mapsto \begin{cases} s\left(1+\cos\dfrac{\pi\,s}{t}\right) & : \ |t| > |s|\,, \\ 0 & : \ \text{sonst}\,, \end{cases}$$

   im Punkt $(0,0)$ stetig aber nicht differenzierbar ist. Existieren die partiellen Ableitungen erster Ordnung im Punkt $(0,0)$?

3. Man gebe die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $(s^*, t^*, f(s^*,t^*))$ an:

   (a) $f(s,t) = s^2 - t^2\,,\ s^* = 2\,, t^* = -2\,,$ (b) **(HA)** $f(s,t) = s^2 \sin(t)\,,\ s^* = 2\,, t^* = \dfrac{\pi}{3}\,.$

4. Berechnen Sie $f'(x)\,,\ x = \begin{bmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_k \end{bmatrix}^T$:

   (a) $f(x) = \begin{bmatrix} \xi_1^2\,\xi_2^3 \\ \xi_1 - \xi_2^2 \end{bmatrix}\,,$ (b) $f(x) = \begin{bmatrix} \xi_1 \cos(\xi_2)\sin(\xi_3) \\ \xi_1^2 - \tan(\xi_3) \end{bmatrix}\,,$

   (c) **(HA)** $f(x) = \xi_2^2 + \tan(\xi_1\xi_2)\,,$ (d) **(HA)** $f(x) = \begin{bmatrix} \xi_1 + e^{\cos\xi_2} \\ \sin(\xi_1) \\ \xi_1 \tan(\xi_2) \end{bmatrix}\,.$

5. Geben Sie die Taylorentwicklung (Abschnitt 0.9.4, Gleichung (0.29), vgl. auch Abschnitt 0.9.3, Punkt 6) für $p = 1$ (ohne Restglied) folgender Funktionen im Punkt x^* an:

   (a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (\xi_1,\xi_2,\xi_3) \mapsto \xi_1\,\xi_2^2\,\xi_3^3\,,\ x^* = (3,-2,1)\,,$

   (b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\,,\ \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \xi_1\xi_2 \\ e^{\xi_1} + e^{2\xi_2} \end{bmatrix}\,,\ x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\,,$

   (c) **(HA)** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\,,\ \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \xi_1^2\,\xi_2^3 \\ \xi_1 - \xi_2^2 \end{bmatrix}\,,\ x^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\,.$