Analysis für Physiker

3. Übung

1. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to \pm\frac{\pi}{2}} \tan x$, (c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}\pm 0} \tan x$, (d) **(HA)** $\lim\limits_{x\to 0} |x|$,

   (e) **(HA)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \arctan x$, (f) $\lim\limits_{x\to\pm 0} x^{-2}$.

2. Es seien $u : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$ und $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion $f(x) = u(x)^{v(x)}$.

3. Ermitteln Sie mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion (Satz 0.15) die Ableitungen der Arkusfunktionen

   (a) $f(x) = \arccos x$, (b) $g(x) = \arcsin x$, (c) **(HA)** $h(x) = \operatorname{arccot} x$.

4. Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt x_0 unter direkter Anwendung der Definition 0.10:

   (a) $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$ - fest), (b) $f(x) = a\,x^2$ ($a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ - fest),

   (c) $f(x) = e^x$, (d) **(HA)** $f(x) = e^{2x}$.

5. Berechnen Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen in $x \in \mathbb{R}$:

   (a) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{x^3}} - \dfrac{1}{3\sqrt[6]{x^7}}$ $(x > 0)$, (b) **(HA)** $\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^n$ $(n \in \mathbb{Z},\, x \neq a)$, (c) $x^{1/x}$ $(x > 0)$,

   (d) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ $(x > 0)$, (e) **(HA)** $\arctan\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ $(-1 < x < 1)$,

   (f) **(HA)** a^{a^x} $(a > 0)$, (g) $x^{\sin x}$ $(x > 0)$, (h) **(HA)** $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ $(x > 0)$,

   (i) a^{x^a} $(a, x > 0)$.

6. Bestimmen Sie die n-te Ableitung folgender Funktionen $f(x)$ in ihrem natürlichen Definitionsgebiet:

   (a) $f(x) = \sin x$, (b) $f(x) = \ln x$, (c) $f(x) = \sqrt{1+x}$, (d) **(HA)** $f(x) = x^n$.

7. Beweisen mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (Satz 0.20)

   (a) $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$, (b) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, $x \in (-1,\infty)\setminus\{0\}$.

8. Berechnen Sie folgende Grenzwerte (ggf. unter Verwendung der l'Hospitalschen Regel):

   (a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}$, (b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$, (c) **(HA)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$,

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(mx)}{\sin(nx)}$, $m, n \neq 0$, (e) **(HA)** $\lim\limits_{x\to 0} x \cot x$, (f) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin(3x)}{\tan(5x)}$,

(g) **(HA)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$, (h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin x^{-1}}{\sin x}$, (i) **(HA)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+\sin x}{3x+\sin x}$,

(j) $\lim\limits_{x\to +0} x^x$, (k) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$, (l) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^s}$, $s>0$,

(m) **(HA)** $\lim\limits_{x\to 0} x^s\ln x$, $s>0$, (n) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$.

9. Entwickeln Sie folgende Funktionen $f: A \longrightarrow B$ im Punkt x_0 nach der Taylorschen Formel bis $n=3$, und geben Sie das Lagrangesche Restglied an:

   (a) **(HA)** $A=[-1,\infty)$, $B=\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1+x}$, $x_0=0$,
   (b) $A=B=\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$, $x_0=1$,
   (c) $A=B=\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^{-x}$, $x_0=0$.

10. Die Unkosten u eines Schiffes berechnen sich nach der Formel $u=a+b\,v^3$ ($a>0$, $b>0$ - Konstanten). Bei welcher Geschindigkeit v ist die Rentabilität $\frac{v}{u}$ maximal?

11. **(HA)** Gilt für $|x|<2$ die Ungleichung $|3x-x^3|\le 2$?

12. Welches Rechteck, das der Ellipse $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$ einbeschrieben ist, hat den größten Flächeninhalt ($a>0$, $b>0$ - Konstanten).

13. Führen Sie zu folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion durch (Definitions- und Wertebereich, Nullstellen, Extremstellen und -werte, Wendepunkte, Konvexität bzw. Konkavität, Monotonie, evtl. Polstellen und das Verhalten an diesen, Asymptoten, Symmetrie):

    (a) **(HA)** $f(x)=3x-x^3$, (b) $f(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{x^2-6x+8}$, (c) $f(x)=x^2e^{-x}$,

    (d) **(HA)** $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{a-x}}$ ($a>0$ - Konstante).