Analysis für Physiker

2. Übung

1. Ermitteln Sie die Grenzwerte und diskutieren Sie die unterschiedliche Annäherung der Folgen an diese Grenzwerte:

   (a) $x_n = \dfrac{1}{n}$, (b) $x_n = -\dfrac{1}{n}$, (c) $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$,

   (d) **(HA)** $x_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n}$, (e) **(HA)** $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$.

2. Geben Sie $a \in \mathbb{R}$ und $N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, an, so dass $|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$ gilt.

   (a) $x_n = \dfrac{n}{n^3+n^2+1}$, (b) **(HA)** $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, (c) $x_n = \dfrac{1+\sqrt{n}}{n^3}$, (d) $x_n = \dfrac{\sin n}{2+\sqrt[3]{n^5}}$,

   (e) **(HA)** $x_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}$, (f) **(HA)** $x_n = \dfrac{1}{n^2}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

3. Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} x_n$:

   (a) $x_n = \dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n+4}$, (b) **(HA)** $x_n = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$, (c) $x_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+2}}$,

   (d) **(HA)** $x_n = (n+1)^k - n^k$, $0 < k < 1$, (e) $x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$,

   (f) $x_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$, (g) **(HA)** $x_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}$, (h) $x_n = \dfrac{\log_a n}{n}$, $a > 1$,

   (i) **(HA)** $x_n = \dfrac{3n^2+\sqrt{n^3+2}}{n^2-n+1}$, (j) $x_n = \dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$,

   (k) **(HA)** $x_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$, (l) **(HA)** $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}$,

   (m) $x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$, (n) **(HA)** $x_n = \sqrt{n^2+n} - n$,

   (o) **(HA)** $x_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$.

4. **(HA)** Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ genau dann gilt, wenn $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$ ist.

5. Zeigen Sie, dass aus der Konvergenz der Zahlenfolgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ die Konvergenz der Zahlenfolge $(\max\{x_n, y_n\})_{n=1}^{\infty}$ folgt.

6. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion

   (a) **(HA)** die Formel

   $$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n+1} n^2 = \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2},$$

   (b) die Summenformel für $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

7. Schreiben Sie den Term $(x-y)^5$ als Summe von Produkten von Potenzen von x und y.

8. **(HA)** Berechnen Sie den Koeffizienten vor a^{15} in $(1+a)^{20}$.

9. Beweisen Sie

   (a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, (b) **(HA)** $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

10. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 6 \cdot (2n)} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

   gilt.

11. Beweisen Sie für $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ die Gültigkeit der Ungleichung

$$(1+\lambda)^n > \frac{(n\lambda)^2}{4}.$$