Analysis für Physiker

1. Übung

Wir erinnern an die Definition des Betrages $|x|$ einer reellen Zahl x :

$$|x| = \begin{cases} x & : \quad x \geq 0\,, \\ -x & : \quad x < 0\,. \end{cases}$$

1. Beweisen Sie folgende Aussagen:
   (a) Es gilt $|x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Es gilt $|x| = 0$ dann und nur dann, wenn $x = 0$.
   (c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
   (d) Es gilt die Dreiecksungleichung $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
   (e) $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
   (f) $\Big||y - x| - |z - y|\Big| \leq |x - z| \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$

2. Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Ungleichungen bzw. Gleichungen
   (a) $|x - 2| \geq 10$, (b) **(HA)** $|x| > |x + 1|$, (c) $|x + 2| + |x - 2| \leq 12$,
   (d) **(HA)** $|x+2| - |x| > 1$, (e) $|x-1| \cdot |x-2| = 2$, (f) **(HA)** $|x| + |x+1| + |x-1| = 3$?

3. Veranschaulichen Sie in der xy–Ebene die Lösungsmengen folgender Ungleichungen:
   (a) $|x| + |y| \leq 1$, (b) $|x + y| \leq 1$, (c) $1 \leq |x - y| \leq 2$.

4. Verwenden Sie die Beziehungen

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\,, \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,, \quad \tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1\,, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0\,, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1\,,$$

   und

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta\,,$$

   zum Nachweis der Richtigkeit folgender Formeln:
   (a) $\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\alpha$,
   (b) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$,
   (c) $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$,
   (d) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$,
   (e) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$,
   (f) $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.

5. Lösen Sie folgende Gleichungen bzw. Gleichungssysteme:

   (a) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 12\,,$

   (b) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7\,,$

   (c) $\dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = 5\,,$

   (d) $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = a\,,\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = b\,,$

   (e) **(HA)** $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}\,,$

   (f) $\lg\left(3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}\right) - 2 = \frac{1}{4}\lg 16 - \sqrt{x+0.25}\,\lg 4\,.$

6. Man löse folgende Ungleichungen:

   (a) $3^{4x^2-7x-14} \geq 9^{x^2-3x-4}\,,$ (b) **(HA)** $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}\,,$

   (c) $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-9} + \sqrt{5-x}\,,$ (d) **(HA)** $\sqrt{2+x-x^2} > x-4\,.$

7. Dividieren Sie:

   (a) $(21a^3 - 34a^2b + 25b^3) : (7a+5b)\,,$ (b) **(HA)** $(9x^3 + 2y^3 - 7xy^2) : (3x-2y)\,.$

8. Vereinfachen Sie:

   (a) $\dfrac{16-49m^2}{16-28m}\,,$ (b) $\dfrac{x^2-4y^2}{x^2-4xy+4y^2}\,,$ (c) $\dfrac{a}{a^2-2ab+b^2} - \dfrac{a}{a^2-b^2} + \dfrac{1}{a+b}\,,$

   (d) $\dfrac{\frac{a+1}{a-1} - 1}{\frac{a+1}{a-1} + 1}\,,$ (e) $\dfrac{\frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2} - \left(\frac{1}{x}\right)^2}\,,$ (f) **(HA)** $\left(a^{-x}\right)^{-2y}\,,$ (g) **(HA)** $\left(-a^{-3}\right)^{2n}\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$

   (h) **(HA)** $\left(\dfrac{b^{-5}x^2}{a^{-6}y^{-4}}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{a^4b^{-3}}{x^{-1}y^{-2}}\right)^{-6}\,,$ (i) **(HA)** $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{2}{3}}\,,$ (j) **(HA)** $a^{\frac{5}{3}} : a^{\frac{2}{5}}\,,$

   (k) **(HA)** $\sqrt[5]{a^2b^2}\,\sqrt[3]{ab^4}\,ab^{-1}\,,$ (l) **(HA)** $\sqrt[3]{a\sqrt{b}}\,,$ (m) **(HA)** $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\,.$

9. Geben Sie zu folgenden Ausdrücken die quadratische Ergänzung an:

   (a) $x^2 + 6x\,,$ (b) $z^2 - \frac{1}{7}z\,,$ (c) $\frac{16}{49}t^2 - \frac{16}{21}t\,.$

10. Überprüfen Sie die Richtigkeit folgender Gleichungen:

    (a) $\dfrac{\sqrt[n]{a^{2n-3}} \cdot \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n+7}}{\sqrt[n]{a^4}} = a^3\,,$ (b) $\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a^4-x^4}}\,(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = (a-x)^{-\frac{1}{2}}\,,$

    (c) **(HA)** $0.5^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}\,.$

11. Machen Sie den Nenner rational:

    (a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\,,$ (b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}\,,$ (c) $\dfrac{1}{2\sqrt{7}+\sqrt{5}}\,.$

12. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

    (a) $(\log_2 x)^{-1} - (\log_2 x - 1)^{-1} < 1\,,$ (b) $\sin x + \cos x = 1\,?$