Prüfungsfragen **Analysis IV für Physiker**, SS 2007

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Dynamische Systeme

1. Erläutern Sie die Begriffe dynamisches System, Fluss, Phasenraum, erweiterter Phasenraum, Trajektorie und Orbit. Welche Typen von Flusslinien kennen Sie? Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen einem dynamischen System und einem autonomen Differentialgleichungssystem.

2. Formulieren Sie das Existenz- und Eindeutigkeitstheorem für autonome Systeme (Theorem 5.7) und den Begriff des lokalen Flusses. Kann man dieses Theorem auch auf nichtautonome Systeme anwenden?

3. Was kann man über Flusslinien endlichen oberen bzw. unteren Alters aussagen (Folg. 5.13)? Was versteht man unter einem global integrierbaren Geschwindigkeitsfeld? Geben Sie eine hinreichende Bedingung für die globale Integrierbarkeit an.

4. Was versteht man unter einem ersten Integral? Erläutern Sie dies am Beispiel der (nichtlinearen) Differentialgleichung für das ungedämpfte Pendel (Bsp. 5.17).

5. Erläutern Sie die Begriffe Anfangswertabbildung und Fundamentalsystem bei linearen Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen. Formulieren Sie ein Kriterium dafür, dass ein System von Lösungen ein Fundamentalsystem ist (Folg. 5.18).

6. Was ist ein inhomogenes lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen? Beschreiben Sie die Methode der Variation der Konstanten.

7. Wie kann man die Lösung eines linearen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten unter Verwendung der matrixwertigen Exponentialfunktion schreiben? Betrachten Sie Beispiele (Folg. 5.19, Folg. 5.23).

8. Erläutern Sie die Flussaxiome am Beispiel linearer Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (Zusammenfassung nach Folg. 5.26). Welche Typen stationärer Punkte im Fall zweidimensionaler Systeme mit konstanten Koeffizienten kennen Sie?

9. Was versteht man unter der Anfangswert- und der Transportabbildung für lineare gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung? Wann besitzt das entsprechende homogene Randwertproblem nur die triviale Lösung (Satz 5.29)? Wann ist das inhomogene Randwertproblem eindeutig lösbar (Folg. 5.30)?

10. Wie definiert man die Greensche Funktion für eine Sturmsche Randwertaufgabe und wie kann man diese zur Darstellung der Lösung einer solchen verwenden (Satz 5.31)?

11. Erläutern Sie die Begriffe stabiler, instabiler und zentraler Unterraum sowie stabile, instabile und zentrale Mannigfaltigkeit. Was besagt das Theorem über die stabile Mannigfaltigkeit (Theorem 5.42)? Wie definiert man die entsprechenden globalen Mannigfaltigkeiten?
12. Was sind zueinander topologisch konjugierte Differentialgleichungssysteme? Was besagt das Theorem von Hartman-Grobman (Theorem 5.50)?
13. Welche Stabilitätsbegriffe für stationäre Punkte kennen Sie? Was ist eine Ljapunov-Funktion und wie kann man diese zur Stabilitätsuntersuchung von Gleichgewichtspunkten einsetzen (Theorem 5.54)?
14. Erklären Sie die Grenzmengenbegriffe für Orbits. Welche Eigenschaften haben diese Grenzmengen (Theoreme 5.68 und 5.69)? Was versteht man unter einer attraktiven Menge bzw. unter einem Attraktor?
15. Definieren Sie die Stabilitätsbegriffe für periodische Orbits und die in diesem Zusammenhang interessanten Mannigfaltigkeiten. Was lässt sich speziell für ebene Systeme aussagen (Bem. 5.78)?
16. Wie definiert man die Poincaré-Abbildung und wie kann man Sie zur Untersuchung der Stabilität periodischer Orbits (ebener Fall) einsetzen?

Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Erklären Sie die Begriffe σ-Algebra, messbarer Raum, Wahrscheinlichkeitsverteilung und Wahrscheinlichkeitsraum. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen σ-Additivität und Stetigkeit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung.
2. Erläutern Sie die Begriffe bedingte Wahrscheinlichkeit sowie Unabhängigkeit und vollständige Unabhängigkeit von Ereignissen. Was besagen die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit (6.1) und die Bayessche Formel (6.2)?
3. Was versteht man unter einer Zufallsgröße und ihrer Verteilungsfunktion? Nennen Sie die charakteristischen Eigenschaften einer Verteilungsfunktion (Satz 6.17). Welche Typen von Verteilungsfunktionen kennen Sie?
4. Wie sind Erwartungswert und Varianz einer Zufallsgröße definiert? Was versteht man unter einem bedingten Erwartungswert und einer bedingten Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße? Wann nennt man Zufallsgrößen stochastisch unabhängig?
5. Wie berechnet sich die Verteilungsfunktion der Summe zweier unabhängiger Zufallsgrößen?
6. Wie kann man eine Zufallsgröße normieren? Definieren Sie den Korrelationskoeffizienten zweier Zufallsgrößen und dessen Eigenschaften (Folg. 6.39, 6.40, 6.41). Beweisen Sie das schwache Gesetz der großen Zahlen (Satz 6.44).

7. Was besagen das starke Gesetz der großen Zahlen (Satz 6.45), der Satz von de Moivre-Laplace (Satz 6.48) und der zentrale Grenzwertsatz (Satz 6.54)?

8. Was versteht man unter einer Maximum-Likelihood-Schätzung und einer erwartungstreuen Schätzung? Warum ist die Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsgröße nicht erwartungstreu schätzbar (Bsp. 6.58)?

9. Was versteht man unter einem Konfidenzbereich zum Konfidenzniveau $1-\alpha$? Wie kann man im Falle eines diskreten Stichprobenraumes einen geeigneten Konfidenzbereich zu gegebenem Niveau konstruieren?

10. Wie kann man Maximum-Likelihood-Schätzer für die Parameter der Normalverteilung konstruieren?

11. Wie kann man Konfidenzintervalle für den Erwartungswert der Normalverteilung konstruieren? Erläutern Sie die Methode der kleinsten Quadrate.

12. Erklären Sie die Begriffe Hypothese, Alternative, Verwerfungsbereich, Gütefunktion, Fehler erster und zweiter Art, Niveau und Macht eines Testes. Was ist ein randomisierter Test?

13. Was versteht man unter einem Neyman-Pearson-Test, und was besagt der Satz von Neyman-Pearson (Satz 6.63)?