Skript zur Vorlesung

Analysis III

für Physiker

WS 2006/07

Peter Junghanns

Hinweis: Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 3

Funktionentheorie (Fortsetzung)

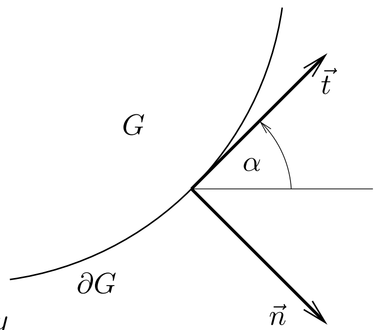
3.9 Randwertprobleme für harmonische Funktionen

3.9.1 Zum Dirichletschen Randwertproblem für harmonische Funktionen

Im weiteren sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, welches von einer einfachen, geschlossenen und stückweise glatten Kurve ∂G berandet wird. Mit Δ bezeichnen wir den sog. **Laplace-Operator**

$$\Delta u(x,y) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,.$$

1° Für das Weitere nehmen wir an, dass die Funktionen $u, v : G \cup \partial G \longrightarrow \mathbb{R}$ gemeinsam mit ihren partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2 stetig sind. Bezeichnen wir mit $\vec{t} = [\cos\alpha, \sin\alpha]^T$ die Richtung der Tangente an ∂G, so folgt aus dem Gaußschen Integralsatz (Satz 0.116)



$$\begin{aligned}
\iint_G \Delta u\, dx\, dy &= \iint_G \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) dx\, dy \\
&= \int_{\partial G} (u_x\, dy - u_y\, dx) \\
&= \int_{\partial G} (u_x \sin\alpha - u_y \cos\alpha)\, ds
\end{aligned}$$

also

$$\iint_G \Delta u\, dx\, dy = \int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, ds\,, \tag{3.1}$$

wobei $\vec{n}$ die Richtung der äußeren Normalen an ∂G ist.

2° Analog erhält man

$$\begin{aligned}\iint_G v\,\Delta u\,dx\,dy &= \iint_G \left(\frac{\partial(v\,u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v\,u_y)}{\partial y}\right) dx\,dy - \iint_G (v_x u_x + v_y u_y)\,dx\,dy \\ &= \int_{\partial G} (v\,u_x\,dy - v\,u_y\,dx) - \iint_G (v_x u_x + v_y u_y)\,dx\,dy\end{aligned}$$

und somit (**1. Greensche Formel**)

$$\iint_G v\Delta u\,dx\,dy = \int_{\partial G} v\,\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,ds - \iint_G (v_x u_x + v_y u_y)\,dx\,dy\,. \tag{3.2}$$

3° Aus Gleichung (3.2) folgt auch (**2. Greensche Formel**)

$$\iint_G (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,dx\,dy = \int_{\partial G} \left(v\,\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\,\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\right) ds\,. \tag{3.3}$$

Definition 3.1 *Eine Funktion $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ nennt man* **harmonisch** *im Gebiet Ω, wenn die Funktionen $u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}$ in Ω stetig sind und $\Delta u = 0$ in Ω gilt.*

4° Aus (3.1) folgt, dass unter der Voraussetzung der Stetigkeit der Funktionen u, u_x, u_y, u_{xx}, $u_{yy} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion u genau dann in einem einfach zusammenhängenden Gebiet Ω harmonisch ist, wenn für jede einfache, geschlossene, stückweise glatte Kurve $\Gamma \subset \Omega$ gilt

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,ds = 0\,,$$

wobei $\vec{n}$ die äußere Normale an Γ bzgl. des durch Γ berandeten Gebietes bezeichnet.

5° Eine in Ω harmonische Funktion, die gemeinsam mit ihren Ableitungen bis zur Ordnung 2 auf $\overline{\Omega}$ stetig ist, ist durch ihre Funktionswerte auf dem Rand $\partial\Omega$ eindeutig bestimmt, d.h., sind $u_j : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, zwei solche Funktionen mit $u_1(x, y) = u_2(x, y)\ \forall\,(x, y) \in \partial\Omega$, so folgt $u_1(x, y) = u_2(x, y)\ \forall\,(x, y) \in \Omega$. Setzen wir nämlich $u = u_1 - u_2$, so folgt $u = 0$ auf $\partial\Omega$ und $\Delta u = 0$ in Ω. Aus (3.2) folgt dann (für $v = u$)

$$\iint_\Omega \left[(u_x)^2 + (u_y)^2\right]\,dx\,dy = 0$$

und somit $u_x = u_y = 0$ in Ω, woraus sich $u \equiv \text{const} = 0$ ergibt.

6° (**Mittelwerteigenschaft** für harmonische Funktionen) Es seien $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonisch und $U_R(x_0, y_0) \subset \Omega$. Dann gilt

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial U_R(x_0,y_0)} u(x, y)\,ds\,.$$

Beweis. Für $v(x,y) = \ln\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ gilt $\Delta v(x,y) = 0 \ \forall\,(x,y) \neq (x_0,y_0)$. Seien $0 < \rho < R$ und $G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \rho < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < R\right\}$. Aus (3.3) folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_G (v\,\Delta u - u\,\Delta v)\,dx\,dy \\ &= \int_{\partial U_R(x_0,y_0)} \left(v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\right) ds - \int_{\partial U_\rho(x_0,y_0)} \left(v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\right) ds\,. \end{aligned}$$

Wegen 4° gilt

$$\int_{\partial U_R(x_0,y_0)} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,ds = \ln R \int_{\partial U_R(x_0,y_0)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,ds = 0$$

und

$$\int_{\partial U_\rho(x_0,y_0)} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,ds = \ln \rho \int_{\partial U_\rho(x_0,y_0)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,ds = 0\,,$$

so dass

$$\int_{\partial U_R(x_0,y_0)} u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\,ds = \int_{\partial U_\rho(x_0,y_0)} u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\,ds\,.$$

Wir haben nun

$$\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = \frac{1}{R} \quad \text{auf} \quad \partial U_R(x_0,y_0)\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = \frac{1}{\rho} \quad \text{auf} \quad \partial U_\rho(x_0,y_0)\,.$$

Daraus folgt für $0 < \rho < R$

$$\frac{1}{R}\int_{\partial U_R(x_0,y_0)} u\,ds = \frac{1}{\rho}\int_{\partial U_\rho(x_0,y_0)} u\,ds = \int_{-\pi}^{\pi} u(x_0+\rho\cos\varphi, y_0+\rho\sin\varphi)\,d\varphi \longrightarrow 2\pi u(x_0,y_0)$$

$(\rho \longrightarrow 0)$. □

7° (**Maximumprinzip** für harmonische Funktionen) Aus der Mittelwerteigenschaft 6° folgt, dass eine auf $\overline{\Omega}$ stetige und in Ω harmonische und nicht konstante Funktion ihren größten und kleinsten Funktionswert nur auf dem Rand annehmen kann.

8° Aus dem Maximumprinzip 7° ergibt sich ein anderer Beweis für 5°, wobei die Voraussetzungen an u abgeschwächt werden können (in Ω harmonisch und auf $\overline{\Omega}$ stetig).

Es sei nun $G \subset \mathbb{R}^2$ wieder ein Gebiet, welches von einer einfachen, geschlossenen und stückweise glatten Kurve berandet wird. Wir suchen eine in G harmonische und auf $G \cup \partial G$ stetige Funktion u, so dass

$$u = g \quad \text{auf} \quad \partial G \tag{3.4}$$

gilt, wobei $g : \partial G \longrightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene stetige Funktion ist.

9° Es sei $f(z) = u(x,y) + \mathbf{i}v(x,y)$, $z = x + \mathbf{i}y$, holomorph in G. Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

folgt dann

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial u}{\partial y^2},$$

also $\Delta u = 0$, und analog $\Delta v = 0$. D.h., Real- und Imaginäranteil einer holomorphen Funktion sind harmonische Funktionen. Man nennt $v(x,y)$ eine zu $u(x,y)$ **konjugiert harmonische** Funktion. Wir wissen, dass sie bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist. Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so existiert zu jeder harmonischen Funktion $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ eine konjugiert harmonische Funktion $v : G \longrightarrow \mathbb{R}$. Wählt man einen Punkt $z_0 = x_0 + \mathbf{i}y_0 \in G$, so kann man

$$v(x,y) = \int_{z_0}^{z}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\right), \quad z = x + \mathbf{i}y,$$

setzen, wobei die Integration entlang einer stückweise glatten Kurve von z_0 nach z in G erfolgt. Das Integral ist vom Weg unabhängig, und es gilt

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

10° Es seien $\overline{U_R(0)} \subset G$, $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonisch und $v : G \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zu $u(x,y)$ konjugiert harmonische Funktion. Dann ist $f = u + \mathbf{i}v$ in G holomorph, und für $z \in U_R(0)$ gilt nach der Cauchyschen Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{|\xi|=R} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi.$$

Mit $\widetilde{z}$ sei der Spiegelpunkt von $z \in U_R(0)$ an $\partial U_R(0)$ bezeichnet, d.h., mit $z = re^{\mathbf{i}\psi}$, $0 \le \psi < 2\pi$, $r < R$, ist

$$\widetilde{z} = \frac{R^2}{\overline{z}} = \frac{R^2}{r}e^{\mathbf{i}\psi}.$$

Wegen

$$\int_{|\xi|=R} \frac{f(\xi)}{\xi - \widetilde{z}}\,d\xi = 0$$

gilt

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{|\xi|=R} f(\xi)\left[\frac{1}{\xi-z}-\frac{1}{\xi-\widetilde{z}}\right]d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_0^{2\pi} f(R\,e^{\mathbf{i}\varphi})\left[\frac{1}{Re^{\mathbf{i}\varphi}-r\,e^{\mathbf{i}\psi}}-\frac{1}{R\,e^{\mathbf{i}\varphi}-\frac{R^2}{r}e^{\mathbf{i}\psi}}\right]\mathbf{i}R\,e^{\mathbf{i}\varphi}\,d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R\,e^{\mathbf{i}\varphi})\frac{(r^2-R^2)\,e^{\mathbf{i}\psi}\,e^{\mathbf{i}\varphi}\,d\varphi}{R\,r\,e^{\mathbf{i}2\varphi}+R\,r\,e^{\mathbf{i}2\psi}-(r^2+R^2)\,e^{\mathbf{i}(\psi+\varphi)}} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R\,e^{i\varphi})\frac{R^2-r^2}{R^2-R\,r\,(e^{\mathbf{i}(\varphi-\psi)}+e^{-\mathbf{i}(\varphi-\psi)})+r^2}\,d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R\,e^{\mathbf{i}\varphi})\frac{R^2-r^2}{R^2-2\,R\,r\cos(\varphi-\psi)+r^2}\,d\varphi
\end{aligned}$$

Somit gilt die **Poissonsche Integralformel** für harmonische Funktionen

$$u(r\cos\psi, r\sin\psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R\cos\varphi, R\sin\varphi)\,\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\varphi-\psi)+r^2}\,d\varphi\,,\;\; 0\le r<R\,.$$

11° Wir betrachten das Dirichletsche Randwertproblem (RWP) (3.4) für $G=U_R(0)$. Mit Hilfe der Poissonschen Integralformel lässt sich zeigen, dass durch

$$u(r\cos\psi, r\sin\psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(R\cos\varphi, R\sin\varphi)\frac{R^2-r^2}{R^2-2\,R\,r\cos(\varphi-\psi)+r^2}\,d\varphi$$

eine Lösung gegeben ist. Wir wissen bereits, dass diese eindeutig bestimmt ist (Maximumprinzip für harmonische Funktionen). Mit den Bezeichnungen $z=r(\cos\psi+\mathbf{i}\sin\psi)$ und $\xi=R(\cos\varphi+\mathbf{i}\sin\varphi)$ gilt

$$\frac{\xi+z}{\xi-z}=\frac{R^2-r^2+2\,\mathbf{i}R\,r\sin(\psi-\varphi)}{R^2-2\,R\,r\cos(\psi-\varphi)+r^2}\,,$$

so dass

$$u(z)=u(r\cos\psi, r\sin\psi)=\frac{1}{2\pi}\,\mathsf{Re}\left\{\int_0^{2\pi} g(\xi)\,\frac{\xi+z}{\xi-z}\,d\varphi\right\}\,,\qquad (\xi=Re^{\mathbf{i}\varphi})\,.$$

12° Wir lösen das Dirichletsche RWP (3.4) für die obere Halbebene

$$G=\mathbb{C}_+=\{z\in\mathbb{C}:\mathsf{Im}\,z>0\}\,.$$

Die stetige Funktion $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ habe endliche Grenzwerte

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} g(x)\,.$$

Wir suchen also eine in der oberen Halbebene $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, x \in \mathbb{R}\}$ harmonische Funktion, die auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ stetig ist und der Bedingung $u(x,0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, genügt.

Sei $z_0 = x_0 + \mathbf{i}y_0$ mit $y_0 > 0$ fest gewählt. Nach Beispiel 3.35 ist

$$w = f(z) = \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}$$

eine holomorphe Abbildung der oberen Halbebene auf den Einheitskreis $\{|w| < 1\}$. Nach 11° ist

$$\widetilde{u}(w) = \frac{1}{2\pi} \mathsf{Re} \left\{ \int_0^{2\pi} g(f^{-1}(e^{\mathbf{i}\varphi})) \frac{e^{\mathbf{i}\varphi} + w}{e^{\mathbf{i}\varphi} - w} \, d\varphi \right\}$$

harmonisch in $\{|w| < 1\}$, wobei $\widetilde{u}(e^{\mathbf{i}\varphi}) = g(f^{-1}(e^{\mathbf{i}\varphi}))$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, gilt. Somit ist die Funktion $u(z) = \widetilde{u}(f(z))$ harmonisch in $\{\mathsf{Im}\, z > 0\}$, und für $x = f^{-1}(e^{\mathbf{i}\psi}) \in \mathbb{R}$ gilt $u(x,0) = \widetilde{u}(e^{\mathbf{i}\psi}) = g(x)$. Wir erhalten also unter Verwendung der Substitution

$$t = f^{-1}(e^{\mathbf{i}\varphi}) \quad \text{bzw.} \quad e^{\mathbf{i}\varphi} = \frac{t - z_0}{t - \overline{z_0}}$$

die Formel

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \mathsf{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \frac{\dfrac{t - z_0}{t - \overline{z_0}} + \dfrac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}}{\dfrac{t - z_0}{t - \overline{z_0}} - \dfrac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}} \frac{y_0}{(x_0 - t)^2 + y_0^2} \, dt \right\}.$$

Für $z = z_0$ folgt die **Poissonsche Integralformel für die Ebene**

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \frac{y_0}{(x_0 - t)^2 + y_0^2} \, dt \,.$$

3.9.2 Zum Neumannschen Randwertproblem für harmonische Funktionen

Wir suchen eine harmonische Funktion zu gegebener Normalenableitung auf dem Rand des Gebietes:

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad G\,, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g \quad \text{auf} \quad \partial G\,. \tag{3.6}$$

Aus der Formel (3.1) folgt, dass (3.5), (3.6) nur lösbar sein kann, wenn

$$\int_{\partial G} g \, ds = 0$$

gilt. Aus der ersten Greenschen Formel (siehe (3.2))

$$\int_{\partial G} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, ds - \iint_G (v_x u_x + v_y u_y) \, dx \, dy = \iint_G v \Delta u \, dx \, dy$$

folgt für $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$ auf ∂G und $v = u$ sowie $\Delta u = 0$ in G die Beziehung

$$\iint_G |\nabla u|^2 \, dx \, dy = 0 \, ,$$

also $\nabla u = 0$ auf Ω. Hieraus folgt, dass eine Lösung des Neumann-Problems (3.5), (3.6) bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist. Sind $u(x,y)$ eine Lösung von (3.5), (3.6) und $v(x,y)$ eine zu u konjugiert harmonische Funktion, so folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial v}{\partial \vec{t}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{t}} = -\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \, ,$$

wobei $\vec{t}$ die Richtung der Tangente an ∂G bezeichnet. Also gilt

$$\frac{\partial v}{\partial \vec{t}} = g \quad \text{und somit} \quad v(x,y) = \int_{\partial G(x_0,y_0;x,y)} g \, ds + \text{const} \, ,$$

wobei $\partial G(x_0, y_0; x, y)$ das Kurvenstück des Randes ∂G von einem fest gewählten Punkt $(x_0, y_0) \in \partial G$ zu einem beliebigen Punkt $(x, y) \in \partial G$ ist. Somit lässt sich das Neumann-Problem auch als Dirichlet-Problem für die zugehörige kongugiert harmonische Funktion schreiben.

3.9.3 Ebene stationäre Strömungen

Wir wollen stationäre (d.h. zeitunabhängige), inkompressible und reibungsfreie Strömungen in einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ betrachten. Den Geschwindigkeitsvektor im Punkt $(x, y) \in G$ bezeichnen wir mit $\mathbf{v}(x,y) = [v_1(x,y), v_2(x,y)]^T$. Die Abbildung $\mathbf{v} : G \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei stetig differenzierbar. Wir nehmen weiter an, dass die Strömung frei von Quellen und Wirbeln ist, d.h. (vgl. Kapitel 4)

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \quad \text{in} \quad G \tag{3.7}$$

und

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad \text{in} \quad G \, . \tag{3.8}$$

Daraus kann man schließen (vgl. Kapitel 4), dass ein Skalarfeld $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ gilt. Damit ist $v_1 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$, $v_2 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$, woraus unter Verwendung von (3.7)

$$\Delta\varphi = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0$$

folgt. D.h., φ ist in G harmonisch. Wir schreiben für $z = x + \mathbf{i}y$

$$v(x,y) = v(z) = v_1(x,y) + \mathbf{i}v_2(x,y) \, .$$

Es sei $\psi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zu φ konjugiert harmonische Funktion. Die in G holomorphe Funktion

$$f(z) = f(x + \mathbf{i}y) = \varphi(x,y) + \mathbf{i}\psi(x,y)$$

heißt dann **komplexes Strömungspotential**. Die Funktionen φ bzw. ψ nennt man **Potential** der Strömung bzw. **Stromfunktion** des komplexen Strömungsfeldes v. Die Kurven

$$\{(x,y) \in G : \psi(x,y) = \text{const}\}$$

sind die **Stromlinien**.

Bemerkung 3.2 *Gibt es Punktquellen bzw. -wirbel, so ist f dort singulär. Ferner folgt aus den C.-R.-Dgln.*

$$v(z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \mathbf{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \overline{f'(z)}\,. \tag{3.9}$$

Ist $\Gamma \subset G$ eine geschlossene, doppelpunktfreie und stückweise glatte Kurve, so sind der **Fluss** F_Γ durch Γ und die **Zirkulation** Z_Γ entlang Γ gegeben durch (vgl. Kapitel 4)

$$F_\Gamma = \int_\Gamma v_1(x,y)\,dy - v_2(x,y)\,dx$$

und

$$Z_\Gamma = \int_\Gamma v_1(x,y)\,dx + v_2(x,y)\,dy\,.$$

Dies kann in komplexer Form unter Verwendung der Beziehung (3.9) geschrieben werden als

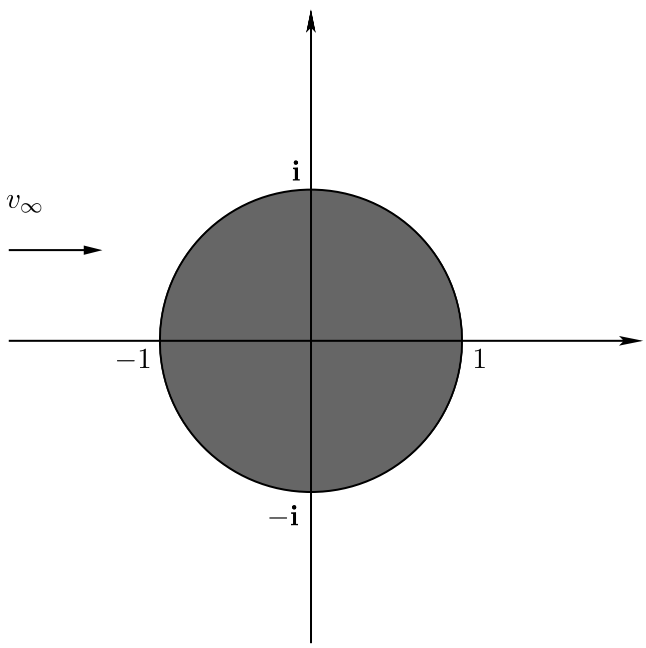
$$Z_\Gamma + \mathbf{i}F_\Gamma = \int_\Gamma [v_1(x,y) - \mathbf{i}v_2(x,y)][dx + \mathbf{i}\,dy] = \int_\Gamma \overline{v(z)}\,dz = \int_\Gamma f'(z)\,dz\,. \tag{3.10}$$

Beispiel 3.3 *Wir betrachten die zirkulationsfreie Umströmung eines unendlichen Kreiszylinders. Das Strömungsgebiet sei*

$$G = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

und für die Strömungsgeschwindigkeit gelte

$$v(z) \longrightarrow v_\infty \in \mathbb{R} \quad \textit{für} \quad |z| \longrightarrow \infty\,.$$



Die Ableitung $f' : G \longrightarrow \mathbb{C}$ des gesuchten komplexen Strömungspotentials muss also holomorph und in einer Umgebung des unendlich fernen Punktes beschränkt sein (*siehe* (3.9)), *d.h.*

$$f'(z) = v_\infty + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \cdots \quad \text{für} \quad |z| > 1\,.$$

Für $R > 1$ gilt dann (siehe (3.10)*)*

$$\int_{\Gamma_R = \partial U_R(0)} f'(z)\,dz = 2\pi\mathbf{i}a_{-1} = Z_{\Gamma_R} + \mathbf{i}F_{\Gamma_R} = \mathbf{i}F_{\Gamma_R}\,,$$

so dass für $R \longrightarrow 1$ wegen $F_{\Gamma_1} = 0$ folgt $a_{-1} = 0$. Somit ist

$$w = \widetilde{\varphi} + \mathbf{i}\widetilde{\psi} = f(z) = v_\infty z + a_0 - \frac{a_{-2}}{z} - \frac{a_{-3}}{2z^2} - \cdots$$

Da Γ_1 Stromlinie sein soll, was äquivalent zu $\frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial \vec{n}} = 0$ auf Γ_1 ist, muss $\widetilde{\psi}(x,y) = const$ auf Γ_1 sein. Deshalb ist das Bild $f(\Gamma_1)$ eine zur u-Achse parallele Strecke Γ^*. Da wir wissen, dass die Joukowski-Funktion diese Eigenschaft hat, machen wir den Ansatz

$$f(z) = \alpha\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Es folgt $f'(z) = \alpha\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) \longrightarrow \alpha = v_\infty$ für $z \longrightarrow P_\infty$ und

$$\widetilde{\varphi}(x,y) = v_\infty\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi\,, \quad \widetilde{\psi}(x,y) = v_\infty\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi\,.$$

Die Stromlinien $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \psi(x,y) = 2\beta\right\}$ erhält man also für $\beta \neq 0$ aus den Gleichungen

$$r - \frac{1}{r} = \frac{2\beta}{\sin\varphi} \Leftrightarrow r^2 - \frac{2\beta}{\sin\varphi}r - 1 = 0\,,$$

d.h.

$$r = \frac{\beta}{\sin\varphi} + \sqrt{\frac{\beta^2}{\sin^2\varphi} + 1}\,.$$

Im Fall $\beta = 0$ sind die Stromlinien gleich

$$\left\{re^{\mathbf{i}\varphi} : r = 1, \varphi \in [0, 2\pi)\right\} \cup \left\{re^{\mathbf{i}\varphi} : r > 1, \varphi \in \{0, \pi\}\right\}.$$

Die **Staupunkte** *der Strömung, d.h. die Punkte mit $v = 0$, erhält man aus $f'(z) = 0$. Somit sind $S_1 = -1$ und $S_2 = 1$ die Staupunkte.*

Beispiel 3.4 *Im Fall $Z_{\Gamma_1} \neq 0$ ist $a_{-1} = \frac{Z_{\Gamma_1}}{2\pi\mathbf{i}}$ und man erhält*

$$f'(z) = v_\infty\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) + \frac{Z_{\Gamma_1}}{2\pi\mathbf{i}}\frac{1}{z}\,.$$

In diesem Fall sind die Staupunkte die Lösungen der Gleichung

$$z^2 + \frac{Z_{\Gamma_1}}{2\pi \mathbf{i} v_\infty} z - 1 = 0 \,,$$

also gleich

$$S_{1,2} = \frac{1}{4\pi v_\infty} \left(\mathbf{i} Z_{\Gamma_1} \mp \sqrt{16\pi^2 v_\infty^2 - Z_{\Gamma_1}^2} \right) .$$

Im Fall $|Z_{\Gamma_1}| < 4\pi v_\infty$ *gibt es also zwei verschiedene Staupunkte mit* $|S_{1,2}| = 1$, *im Fall* $|Z_{\Gamma_1}| = 4\pi v_\infty$ *genau einen Staupunkt* ($S_1 = S_2 = \mathbf{i}$ *oder* $S_1 = S_2 = -\mathbf{i}$). *Ist* $|Z_{\Gamma_1}| > 4\pi v_\infty$, *so existieren keine Staupunkte auf* Γ_1.

3.9.4 Das Potential einer Punktladung

Für das Potential einer ebenen Punktladung im Nullpunkt können wir folgenden Ansatz machen:

(a) $\Delta u = 0$ für $(x, y) \neq (0, 0)$,

(b) $\nabla u = \frac{f(r)}{r} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

Wir bestimmen $f(r)$ und betrachten dazu den Kreisring K_{r_1,r_2}, $0 < r_1 < r_2$. Aus der Formel (3.1) folgt

$$0 = \iint_{K_{r_1,r_2}} \Delta u \, dx\, dy = \int_{\partial K_{r_1,r_2}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, ds = \int_{\partial U_{r_2}(0)} \langle \nabla u, \vec{n} \rangle \, ds - \int_{\partial U_{r_1}(0)} \langle \nabla u, \vec{n} \rangle \, ds \,.$$

Somit ist das Integral $\int_{\partial U_r(0)} \langle \nabla u, \vec{n} \rangle \, ds$ als Funktion von $r > 0$ eine Konstante Q, die wir Quellstärke oder Ladung nennen. Es folgt $Q = 2\pi r f(r)$ und

$$(\nabla u)(x, y) = \frac{Q}{2\pi \sqrt{x^2 + y^2}} \begin{bmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{bmatrix} .$$

Man kann also

$$u(x, y) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{1}{|z|} \,, \quad z = x + \mathbf{i} y \,,$$

wählen. Diese Funktion $u(x, y)$ ist Lösung von

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad U_1(0) \setminus \{0\} \,, \quad u = 0 \quad \text{auf} \quad \partial U_1(0) \,.$$

Sie ist also das Potential einer Punktladung im Koordinatenursprung mit geerdetem Einheitskreis. Liegt die Punktladung in z_0 mit $|z_0| < 1$, so verwenden wir die konforme Abbildung

$$w = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}$$

der Einheitskreisscheibe auf sich selbst (vgl. Bsp. 3.36) und erhalten das Potential

$$u(x, y) = \frac{Q}{2\pi} \ln \left| \frac{1 - \overline{z_0} z}{z - z_0} \right| .$$

3.10 Partialbruchzerlegung und Fundamentalsatz der Algebra

Satz 3.5 *Sei* $f : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ *holomorph mit eventueller Ausnahme von isolierten Polstellen. Dann ist* $f(z)$ *eine rationale Funktion.*

Beweis. $f(z)$ kann nur endlich viele Polstellen haben, sagen wir $z_1, ..., z_m$. Dann gibt es Zahlen $\varepsilon > 0$, $R > 0$ und $n_k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, $k = 1, ..., m$, sowie $n_\infty \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, so dass

$$f(z) = \sum_{j=-n_k}^{\infty} a_{jk}(z - z_k)^j \,, \quad 0 < |z - z_k| < \varepsilon \,,\; k = 1, ..., m \,,$$

und

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{n_\infty} a_j z^j \,,\; |z| > R \,.$$

Wir definieren

$$h_k(z) = \sum_{j=-1}^{-n_k} a_{jk}(z - z_k)^j \,, \quad k = 1, ..., m \,,$$

und

$$h(z) = \sum_{j=1}^{n_\infty} a_j z^j \,.$$

Dann ist

$$F(z) = f(z) - h(z) - \sum_{k=1}^{m} h_k(z)$$

in $\overline{\mathbb{C}}$ holomorph und nach dem Satz von Liouville konstant. Es folgt

$$f(z) = const + h(z) + \sum_{k=1}^{n} h_k(z) \quad \text{(Partialbruchzerlegung)}$$

und der Satz ist bewiesen. □

Satz 3.6 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes nichtkonstante Polynom*

$$p(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0 \,, \quad a_k \in \mathbb{C} \,,$$

besitzt mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ *.*

Beweis. Wäre $p(z) \neq 0 \ \forall\, z \in \mathbb{C}$, so wäre $g(z) := \dfrac{1}{p(z)}$ in $\overline{\mathbb{C}}$ holomorph und somit nach dem Satz von Liouville konstant. □

3.11 Die Fouriertransformation

Einer 2π-periodischen Funktion $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ hatten wir ihre Fourierreihe (vgl. Abschnitt 1.5)

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt \quad \text{und} \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt$$

zugeordnet. Für eine L-periodische Funktion $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ nimmt die Fourierreihe die Gestalt

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi nx}{L}+b_n\sin\frac{2\pi nx}{L}\right)$$

mit

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{Lt}{2\pi}\right)\cos nt\,dt=\frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(t)\cos\frac{2\pi nt}{L}\,dt$$

und

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{Lt}{2\pi}\right)\sin nt\,dt=\frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(t)\sin\frac{2\pi nt}{L}\,dt$$

an. Für eine L-periodische und komplexwertige Funktion $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ können wir die Fourierreihe auch in der Form

$$\sum_{N=-\infty}^{\infty}c_n e^{\mathbf{i}\frac{2\pi nx}{L}}$$

mit

$$c_n=\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(t)\,e^{-\mathbf{i}\frac{2\pi nt}{L}}\,dt$$

schreiben. Sind f und f' stückweise stetig mit $f(x)=\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]\ \forall\, x\in\mathbb{R}$, so gilt (vgl. Theorem 1.49)

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\mathbf{i}\frac{2\pi nx}{L}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(t)\,e^{\mathbf{i}\frac{2\pi n}{L}(x-t)}\,dt=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}f(t)\,e^{\mathbf{i}\frac{2\pi n}{L}(x-t)}\,dt\,\frac{2\pi}{L}\,.$$

Wir setzen $\Delta s:=\dfrac{2\pi}{L}$, betrachten den Grenzübergang $\Delta s\longrightarrow 0$ (d.h. $L\longrightarrow\infty$) und erhalten (formal)

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{\mathbf{i}(x-t)s}\,dt\,ds=\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(s)e^{\mathbf{i}xs}\,ds$$

mit der **Fouriertransformation** der Funktion $f(x)$

$$\widehat{f}(s):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-\mathbf{i}ts}\,dt\,.$$

Beispiel 3.7 *Wir betrachten die T-periodische Rechteckschwingung (vgl. auch Bsp. 1.48)*

$$R:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,,\ x\mapsto\begin{cases}1 & : \quad 0<x<T/2\,,\\ 0 & : \quad x=-T/2\,,\ x=0\,,\\ -1 & : \quad -T/2<x<0\,.\end{cases}$$

Wir erhalten

$$c_n=c_n(R)=\begin{cases}0 & : \quad n \text{ gerade}\,,\\ -\dfrac{2\mathbf{i}}{\pi n} & : \quad n \text{ ungerade}\,.\end{cases}$$

Es folgt ($\omega:=2\pi/T$)

$$R(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\,\sin[(2n+1)\omega x]\,.$$

Beispiel 3.8 *Für den Rechteckimpuls*

$$r(x)=\begin{cases}1 & : \quad |x|<a\,,\\ 0 & : \quad |x|>a\,,\end{cases}$$

gilt

$$\widehat{r}(s)=\begin{cases}\dfrac{\sin as}{\pi s} & : \quad s\neq 0\,,\\ \dfrac{a}{\pi} & : \quad s=0\,.\end{cases}$$

(A) Ist $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ absolut integrierbar, so existiert $\widehat{f}(s)$ für alle $s\in\mathbb{R}$ und $\widehat{f}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ ist stetig.

Beispiel 3.9 *Für $f(x)=e^{-|x|}$ gilt $\widehat{f}(s)=\dfrac{1}{\pi(1+s^2)}$.*

Beispiel 3.10 *Für die Heaviside-Funktion $h(x)=\begin{cases}0 & : \quad x<0\,,\\ 1 & : \quad x>0\,,\end{cases}$ existiert die Fouriertransformierte nicht.*

Wir definieren

$$\mathcal{S}=\left\{f\in\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}):\sup\left\{\left|x^p f^{(q)}(x)\right|:x\in\mathbb{R}\right\}<\infty\ \forall\,p,q=0,1,2,\dots\right\}\,.$$

(B) Es gilt

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(s)\,e^{\mathbf{i}xs}\,ds\quad\forall\,x\in\mathbb{R}\,,\ \forall\,f\in\mathcal{S}\,.$$

(C) Ist $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ stückweise glatt und absolut integrierbar, so gilt

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}\widehat{f}(s)\,e^{\mathbf{i}xs}\,ds\quad\forall\,x\in\mathbb{R}\,.$$

Beispiel 3.11 *Wir betrachten den Rechteckimpuls aus Bsp. 3.8 und erhalten*

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A}\frac{\sin as}{\pi s}\,e^{\mathbf{i}xs}\,ds=\begin{cases}1 & : \quad |x|<a\,,\\ 1/2 & : \quad |x|=a\,,\\ 0 & : \quad |x|>a\,.\end{cases}$$

(D) Definieren wir für eine gegebene Funktion $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ und $h\in\mathbb{R}$ die Funktion $f_h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ durch $f_h(x):=f(x+h)$, so gilt der **Verschiebungssatz**

$$\widehat{f_h}(s)=e^{\mathbf{i}hs}\widehat{f}(s)\,.$$

Die **Faltung** zweier Funktionen $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ ist definiert als

$$(f*g)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)g(t)\,dt\,.$$

Ist dabei $f(x)=g(x)=0$ für $x<0$, so gilt offenbar

$$(f*g)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{x}f(x-t)g(t)\,dt\,.$$

(E) Es gilt der **Faltungssatz**

$$\widehat{f*g}=\widehat{f}\cdot\widehat{g}\,.$$

(F) Ist $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ stetig und stückweise glatt, so gilt

$$\widehat{f'}(s)=\mathbf{i}s\widehat{f}(s)\,.$$

Ist $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ lediglich stückweise stetig mit den Unstetigkeitsstellen $a_1,\ldots,a_n$ und stückweise glatt, so gilt

$$\widehat{f'}(s)=\mathbf{i}s\widehat{f}(s)-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[f(a_k+0)-f(a_k-0)\right]e^{-\mathbf{i}sa_k}\,.$$

Die Menge der linearen Funktionale über $\mathcal{S}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{T}(\mathcal{S})$. Ihre Elemente nennt man **temperierte Distributionen**. Z.B. ist die Diracsche Deltadistribution δ mit $\delta(\varphi)=\varphi(0)$, $\varphi\in\mathcal{S}$, eine Element von $\mathcal{T}(\mathcal{S})$. Für $F\in\mathcal{T}(\mathcal{S})$ definiert man die Fouriertransformierte $\widehat{F}$ durch $\widehat{F}(\varphi)=F(\widehat{\varphi})\ \forall\,\varphi\in\mathcal{S}$.

Beispiel 3.12 *Es ist*

$$\widehat{\delta}(\varphi)=\delta(\widehat{\varphi})=\widehat{\varphi}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx\,,$$

d.h. $\widehat{\delta}=\frac{1}{2\pi}$.

Beispiel 3.13 *Für $f(x) = e^{-x^2/2}$ haben wir*

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-s^2/2}\,.$$

Daraus kann man schließen, dass für $t > 0$ und $g_t(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}$ die Beziehung

$$\widehat{g_t}(s) = e^{-s^2 t}$$

gilt.

Beispiel 3.14 *Die Wärmeleitung in einem unendlich langen Stab kann durch die partielle Differentialgleichung*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,, \quad -\infty < x < \infty\,,\ t > 0\,,$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = f(x)$$

für die gesuchte Temperaturverteilung $u(x,t)$ beschrieben werden. Wir setzen

$$\widehat{u}(s,t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-\mathbf{i}xs}\,dx$$

und folgern aus der Differentialgleichung und der Anfangsbedingung

$$\frac{\partial \widehat{u}(s,t)}{\partial t} = (\mathbf{i}s)^2\widehat{u}(s,t) = -s^2\widehat{u}(s,t) \quad \text{und} \quad \widehat{u}(s,0) = \widehat{f}(s)\,.$$

Es folgt unter Verwendung von Bsp. 3.13

$$\widehat{u}(s,t) = \widehat{f}(s)e^{-s^2 t} = \widehat{f}(s)\widehat{g_t}(s)\,,$$

so dass nach dem Faltungssatz (E) die Formel

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_t(x-u)f(u)\,du = \sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-u)^2}{4t}} f(u)\,du\,,\ t > 0\,,$$

gilt.

3.12 Logarithmus- und Potenzfunktionen

3.12.1 Zweige des Logarithmus

Wir vereinbaren $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definition 3.15 *Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet. Unter einer* **Logarithmusfunktion** *(bzw. einem* **Zweig des Logarithmus***) verstehen wir eine stetige Funktion $g : G \to \mathbb{C}$ mit $e^{g(z)} = z$ $\forall\, z \in G$.*

Lemma 3.16 *Eine holomorphe Funktion* $f : G_0 \longrightarrow G$ *ist genau dann biholomorph, wenn* $f : G_0 \longrightarrow G$ *bijektiv ist,* $f^{-1} : G \longrightarrow G_0$ *stetig ist und* $f'(z) \neq 0$ *für alle* $z \in G$ *gilt.*

Satz 3.17 *Ist* $g : G \to \mathbb{C}$ *eine Logarithmusfunktion, so ist* g *auf* G *holomorph und es gilt*

$$g'(z) = \frac{1}{z} \quad \forall\, z \in G\,.$$

Beweis. Seien $G_0 = \{g(z) : z \in G\}$ und $w_0 = g(z_0)$, $z_0 \in G$ beliebig. Wir wählen ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $f : U_\varepsilon(w_0) \longrightarrow \mathbb{C}$, $w \mapsto e^w$ injektiv ist. (Beachte: Aus $e^{w_1} = e^{w_2}$ folgt $w_2 = w_1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.) Da g stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $g(U_\delta(z_0)) \subset U_\varepsilon(w_0)$. Aus $e^{w_0} = e^{g(z_0)} = z_0$ folgt, dass ein $\eta > 0$ existiert mit $\eta \leq \varepsilon$ und $e^{U_\eta(w_0)} \subset U_\delta(z_0)$. Aus $w \in U_\eta(w_0)$ folgt $e^w \in U_\delta(z_0)$, so dass $g(e^w) \in U_\varepsilon(w_0)$ und $e^{g(e^w)} = e^w$. Es folgt $g(e^w) = w$, d.h. $U_\eta(w_0) \subset G_0$. G_0 ist also offen. Offenbar ist $f : G_0 \to G$ bijektiv. Aus Lemma 3.16 folgt die Differenzierbarkeit von g, und wegen $e^{g(z)} = z$ ergibt sich $e^{g(z)} g'(z) = 1$, d.h. $g'(z) = \dfrac{1}{z}$. □

Satz 3.18 *Für ein Gebiet* $G \subset \mathbb{C}^*$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) Auf G *existiert eine Logarithmusfunktion.*

(b) $\frac{1}{z}$ *hat auf* G *eine Stammfunktion.*

(c) Jede einfache geschlossene stückweise glatte Kurve in G *umschließt nicht die Null.*

Beweis. Nach Satz 3.17 folgt (b) aus (a).

(b) $\Rightarrow$ (a): Sei $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$, $g'(z) = \frac{1}{z}\ \forall\, z \in G$. Dann folgt $\left(ze^{-g(z)}\right)' = e^{-g(z)} - e^{-g(z)} = 0\ \forall\, z \in G$, d.h. $ze^{-g(z)}$ ist konstant auf G, sagen wir gleich e^c. Wir erhalten $z = e^{g(z)+c}$, d.h. $g(z) + c$ ist Logarithmusfunktion auf G.

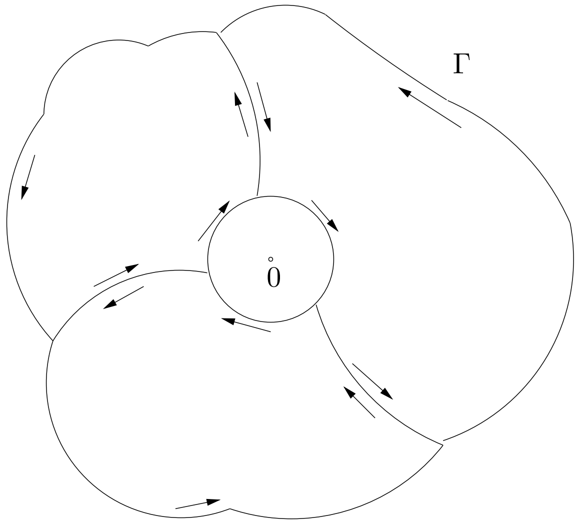
(b) $\Rightarrow$ (c): Hat $\frac{1}{z}$ eine Stammfunktion in G, so ist $\frac{1}{z}$ selbst holomorph in G. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z} = 0$$

für jede einfache geschlossene stückweise glatte Kurve $\Gamma \subset G$. Da aber für jedes $\varepsilon > 0$ die Beziehung

$$\int_{U_\varepsilon(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi\mathbf{i}$$

gilt, kann Γ nicht die Null umschließen (vgl. Skizze).



(c) $\Rightarrow$ (b): Ergibt sich aus dem Satz von Morera (siehe Abschnitt 3.2, Punkt 6). $\square$

Beispiel 3.19 *Auf* $\mathbb{C}^*$ *existiert kein Zweig des Logarithmus.*

Beispiel 3.20 *Sei* $G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. *Wir definieren den* **Hauptzweig des Logarithmus** $\mathrm{Log} : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *durch*

$$\mathrm{Log}\, z = \int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_1^{|z|} \frac{dx}{x} + \int_0^{\varphi} \mathbf{i}\, d\psi = \ln|z| + \mathbf{i}\varphi\,,$$

wobei $z = |z|e^{\mathbf{i}\varphi}$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$. *Man nennt* $\mathrm{Arg}\, z := \varphi \in (-\pi, \pi)$ *auch den* **Hauptzweig des Arguments** *von* z.

Da $\mathrm{Log}\, z$ auf der positiven reellen Achse mit $\ln z$ übereinstimmt, gilt

$$\mathrm{Log}\,(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, z^n\,, \quad |z| < 1\,.$$

Beachte: Es gilt $\mathrm{Log}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2$ dann und nur dann, wenn $\mathrm{Arg}\; z_1 + \mathrm{Arg}\; z_2 \in (-\pi, \pi)$.

Beispiel 3.21 *Wir stellen uns die Frage, wie man* $f(z) = \ln z^2$ *so definieren kann, dass* $f : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ *holomorph ist. Für* $\mathsf{Re}\, z > 0$ *ist* $z^2 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, *so dass wir* $f(z) = \mathrm{Log}\, z^2$ *setzen können. Für* $z = |z|e^{\mathbf{i}\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, *ist also* $f(z) = \mathrm{Log}\,(|z|^2 e^{\mathbf{i}2\varphi}) = 2\ln|z| + 2\mathbf{i}\varphi$. *Aus Stetigkeitsgründen ergibt sich damit*

$$f(z) = 2\ln|z| + 2\mathbf{i}\varphi \quad \forall\, z = |z|\, e^{\mathbf{i}\varphi},\ -\pi < \varphi < \pi\,.$$

3.12.2 Exponential- und Potenzfunktionen

Es seien $a \in \mathbb{C}^*$ und $\ln a$ ein Wert des Logarithmus von a. Dann ist die Funktion $z \mapsto e^{z \ln a}$ holomorph in $\mathbb{C}$ (Bezeichnung $e^{z\ln a} =: a^z$). Dabei gilt

$$\frac{d}{dz}\, a^z = (\ln a)\, a^z\,.$$

Definition 3.22 *Es sei* $\ln : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *ein Zweig des Logarithmus. Dann heißt* $z^b := e^{b \ln z} : G \longrightarrow \mathbb{C}$ *ein* **Zweig der b–ten Potenz** *auf* G.

Es gilt

$$\frac{d}{dz}\left(z^b\right) = \frac{b}{z}\, e^{b\ln z} = b\, e^{-\ln z} e^{b \ln z} = b\, e^{(b-1)\ln z} =: b\, z^{b-1}\,.$$

Den **Hauptzweig der b–ten Potenz** definiert man als $z^b := e^{b \operatorname{Log} z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Es folgt

$$(1+z)^b = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

mit $c_0 = 1$ und

$$c_k = \frac{b(b-1)\ldots(b-k+1)}{k!} = \binom{b}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Beispiel 3.23 (Beispiel für die Konstruktion einer mittelbaren Funktion) *Es sei* $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \dfrac{z-1}{z+1}$. *Wir stellen uns die Frage, auf welchem Gebiet G man eine holomorphe Funktion* $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ *definieren kann.*

(a) Sei $G = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. *Dann ist* $f(G) = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, *da die Gleichung* $f(z) = w$ *für jedes* $w \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ *eine Lösung in G besitzt und* $f(z) \notin \{0, 1\}\ \forall\, z \in G$. *Auf* $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ *existiert kein Zweig des Logarithmus, so dass* $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ *auf G nicht als holomorphe Funktion erklärt werden kann.*

(b) Sei $G = \mathbb{C}\setminus[-1, 1]$. *Dann ist* $f(G) \subset \mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$, *und wir können mit Hilfe des Hauptzweiges des Logarithmus*

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\frac{1}{2}} := \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{z-1}{z+1}\right) =: g(z)$$

definieren. Es ist dann z.B.

$$g(-\mathbf{i}) = \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{-\mathbf{i}-1}{-\mathbf{i}+1}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}(-\mathbf{i})\right) = e^{\frac{1}{2}\left(-\mathbf{i}\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}\,.$$

3.13 Übungsaufgaben

1. Zeigen Sie, dass die Möbiustransformationen (d.h. die gebrochen linearen Abbildungen $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc \neq 0$) bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe bilden.

2. In welche Figuren gehen folgende Mengen bei der Abbildung $f(z) = (\overline{z})^{-1}$ (Spiegelung am Einheitskreis) über?

   (a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, $\quad r > 0$,

   (b) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$,

   (c) **(HA)** $\{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, z = 1\}$,

   (d) **(HA)** eine beliebige Gerade durch $z_0 \neq 0$.

3. Man bestimme das Bild

   (a) von $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ bei der Abbildung $w = \dfrac{z}{1-z}$,

   (b) **(HA)** der rechten Halbebene bei der Abbildung $w = \dfrac{1-z}{1+z}$,

   (c) des ersten Quadranten bei der Abbildung $w = \dfrac{\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}}$

4. Für die Abbildung $w = \dfrac{z-\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}}$ bestimme man das Bild

   (a) der reellen Achse,

   (b) der imaginären Achse,

   (c) **(HA)** des Einheitskreises

   und alle Fixpunkte.

5. Bestimmen Sie eine Abbildung $w = az + b$ mit dem Fixpunkt $1 + 2\mathbf{i}$, die den Punkt $\mathbf{i}$ in den Punkt $-\mathbf{i}$ überführt.

6. Geben Sie die allgemeine Form einer gebrochen linearen Abbildung an, die den Einheitskreis auf die untere Halbebene abbildet.

7. Man bestimme eine gebrochen lineare Abbildung $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, die die Punkte

   (a) -1, $\mathbf{i}$, $1+\mathbf{i}$ in die Punkte 0, $2\mathbf{i}$, $1-\mathbf{i}$

   (b) **(HA)** -1, P_∞, $\mathbf{i}$ in die Punkte P_∞, $\mathbf{i}$, 1

   überführt.

Kapitel 4

Vektoranalysis

4.1 Kurven im $\mathbb{R}^n$

Definition 4.1 *Eine stetige Abbildung* $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *heißt* **Weg** *im* $\mathbb{R}^n$ *. Ihr vollständiges Bild, d.h. die Menge* $\Gamma = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$ *, nennt man* **Kurve***. Die Gleichung*

$$x = \gamma(t), \quad t \in [a, b],$$

die äquivalent auch in der Form

$$x_k = \gamma_k(t), \quad k = 1, \dots, n, \ t \in [a, b],$$

mit stetigen Funktionen $\gamma_k : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *geschrieben werden kann, heißt* **Parameterdarstellung** *der Kurve* Γ *. Dabei nennt man* $\gamma(a)$ *den* **Anfangspunkt** *und* $\gamma(b)$ *den* **Endpunkt** *der Kurve* Γ *.*

Beispiel 4.2

1. *Die Parameterdarstellung*

$$x_1 = r \cos t + x_1^0, \ x_2 = r \sin t + x_2^0, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

   beschreibt den Kreis mit dem Radius $r > 0$ *um den Mittelpunkt* $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ *.*

2. *Eine Archimedessche Spirale wird durch die Parameterdarstellung*

$$x_1 = a\, t \cos t, \ x_2 = a\, t \sin t, \quad 0 \le t \le T,$$

   mit $a > 0$ *beschrieben, wobei* $T > 0$ *beliebig gewählt werden kann. Sie trifft die positive* x_1*–Achse in den Punkten* $(2k\pi a, 0)$ *,* $k = 1, 2, \dots$ *, und die positive* x_2*–Achse in den Punkten* $\left(0, a\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)$ *,* $k = 0, 1, \dots$

3. *Die Kurve, die durch die Parameterdarstellung*

$$x_1 = t^3, \ x_2 = t^2, \quad T_1 \le t \le T_2,$$

   beschrieben wird, nennt man Neilsche Parabel.

4. *Die Parameterdarstellung*

$$x_1 = r\cos t\,,\ x_2 = r\sin t\,,\ x_3 = c\,t\,,\quad 0 \le t \le T\,,$$

beschreibt eine (3–dim.) Schraubenlinie mit dem Radius $r > 0$ *und der Ganghöhe* $h = 2\pi c > 0$.

Definition 4.3 *Es sei* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *ein Weg.*

1. *Der Weg* γ *heißt* **doppelpunktfrei** *oder* **einfach**, *wenn die Abbildung* $\gamma : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *injektiv ist. Die entsprechende Kurve nennt man dann auch* **Jordankurve**.

2. *Den Weg* γ *bzw. die entsprechende Kurve* Γ *nennt man* **geschlossen**, *wenn* $\gamma(a) = \gamma(b)$ *gilt. Einem einfachen und geschlossenen Weg entspricht also eine geschlossene Jordankurve.*

3. *Ist das Parameterintervall in Teilintervalle* $[t_0, t_1]\,,\ [t_1, t_2]\,,\ \cdots\,,\ [t_{m-1}, t_m]$ *mit* $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{m-1} < t_m = b$ *zerlegt und sind uns* m *Wege* $\gamma^{(k)} : [t_{k-1}, t_k] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, \ldots, m$ *mit* $\gamma^{(k)}(t_k) = \gamma^{(k+1)}(t_k)$, $k = 1, \ldots, m-1$, *gegeben, so nennt man den zusammengesetzten Weg* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *mit* $\gamma(t) = \gamma^{(k)}(t)$ *für* $t \in [t_{k-1}, t_k]$ *die Summe der Wege* $\gamma^{(k)}$, $k = 1, \ldots, m$, *und schreibt dafür*

$$\gamma = \gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)} \oplus \cdots \oplus \gamma^{(m)}\,.$$

Für die dem Weg $\gamma = \gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)} \oplus \cdots \oplus \gamma^{(m)}$ *entsprechende Kurve* Γ *schreibt man dann auch*

$$\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \cdots \oplus \Gamma_m\,,$$

wobei $\Gamma_k = \{\gamma_k(t) : t_{k-1} \le t \le t_k\}$ *zu setzen ist.*

Wichtige Beispiele zusammengesetzter Kurven sind die sog. Streckenzüge, die im Fall $n = 2$ auch Polygonzüge genannt werden.

Definition 4.4 *Ein Weg* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *heißt* **stetig differenzierbar**, *wenn* $\gamma' : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *existiert und stetig ist,* $\gamma' = \begin{bmatrix} \gamma_1' & \cdots & \gamma_n' \end{bmatrix}^T$, *und wenn, falls* γ *ein geschlossener Weg ist,* $\gamma'(a) = \gamma'(b)$ *gilt. Der Weg* γ *und die entsprechende Kurve* Γ *heißen glatt, wenn zusätzlich* $\gamma'(t) \ne \Theta$ *für alle* $t \in [a,b]$ *gilt. Den Vektor*

$$T_\gamma(t) := \frac{1}{|\gamma'(t)|}\,\gamma'(t) \quad \mathit{mit} \quad |\gamma'(t)| = \left(\sum_{k=1}^n |\gamma_k'(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

nennt man den **Tangentenvektor** *von* γ *in* t.

Definition 4.5 *Man sagt, dass ein Weg* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ **stückweise stetig differenzierbar** *bzw.* **stückweise glatt** *ist, wenn er die Summe endlich vieler stetig differenzierbarer bzw. glatter Wege ist.*

Definition 4.6 *Es seien* $Z \in \mathcal{Z}[a,b]$, $Z = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$, *eine beliebige Zerlegung des Intervalls* $[a,b]$ *und*

$$L_Z(\gamma) := \sum_{k=1}^{m} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}| \,.$$

Der Weg $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *heißt* **rektifizierbar** *(oder* **streckbar***), wenn*

$$L(\gamma) := \sup \{L_Z(\gamma) : Z \in \mathcal{Z}[a,b]\} < \infty$$

gilt.

Satz 4.7 *Für* $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \cdots \oplus \gamma_p$ *gilt* $L(\gamma) = \sum\limits_{k=1}^{p} L(\gamma_k)$.

Satz 4.8 *Jeder stückweise stetig differenzierbare Weg* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *ist rektifizierbar, wobei*

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt = \int_a^b \sqrt{|\gamma_1'(t)|^2 + \cdots + |\gamma_n'(t)|^2} \, dt$$

gilt.

Definition 4.9 *Eine Abbildung* $\varphi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ *heißt* **Parametertransformation***, wenn sie stetig ist, wenn* $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$ *gilt und wenn eine Zerlegung* $Z = \{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_m\} \in \mathcal{Z}[c,d]$ *existiert, so dass* $\varphi' : [\tau_{k-1}, \tau_k] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig ist mit* $\varphi'(\tau) > 0 \ \forall \, \tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$, $k = 1, 2, \ldots, m$. *Zwei Wege* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *und* $\delta : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *nennt man* **äquivalent***, wenn eine Parametertransformation* $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ *mit* $\delta(\tau) = \gamma(\varphi(\tau)) \ \forall \, \tau \in [c,d]$ *existiert.*

Folgerung 4.10 *Für äquivalente Wege* γ *und* δ *gilt*

1. $L(\delta) = L(\gamma)$,
2. $T_\delta(\tau) = T_\gamma(\varphi(\tau))$.

Definition 4.11 *Eine Äquivalenzklasse* $[\gamma]$ *von Wegen, nennt man* **Durchlaufsinn** *der entsprechenden Kurve. Die Abbildung* $\gamma^- : [-b, -a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *mit* $\gamma^-(t) = \gamma(-t)$ *hat den zu* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *entgegengesetzten Durchlaufsinn.*

Die Bogenlänge $s = \varphi(t) = \int_a^t |\gamma'(\tau)| \, d\tau$ ist im Falle eines stückweise glatten Weges eine Parametertransformation $\varphi : [a,b] \longrightarrow [0, L(\gamma)]$. Sei $\varphi^{-1} : [0, L(\gamma)] \longrightarrow [a,b]$ die inverse Abbildung. Dann ist $\delta : [0, L(\gamma)] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\delta(s) = \gamma\left(\varphi^{-1}(s)\right)$ ein zu γ äquivalenter Weg, den man die **natürliche Parametrisierung** der entsprechenden Kurve nennt. Dabei gilt

$$T_\delta(s) = \delta'(s) \,.$$

4.2 Kurvenintegrale

Für das Weitere sei uns eine stückweise glatte Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ mit der Parameterdarstellung $x = \gamma(t)$, $a \le t \le b$, bzw. der äquivalenten Darstellung $x = \delta(s)$, $0 \le s \le L(\gamma)$, über die Bogenlänge s gegeben. Ferner seien $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige skalare und $F : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige vektorwertige Funktion. Die Vektoren $F(x)$ schreiben wir in der Form $\left[\begin{array}{ccc} F_1(x) & \cdots & F_n(x) \end{array}\right]^T$. Wir betrachten nun verschiedene Typen von Kurvenintegralen:

- Kurvenintegral 1. Art:

$$\int_\Gamma f(x)\,ds = \int_a^b f(\gamma(t)\left|\gamma'(t)\right|\,dt = \int_0^{L(\gamma)} f(\delta(s))\,ds$$

- Kurvenintegral 2. Art:

$$\begin{aligned} \int_\Gamma F(x)\,dx &= \int_\Gamma \langle F(x), dx\rangle = \sum_{k=1}^n \int_\Gamma F_k(x)\,dx_k \\ &= \sum_{k=1}^n \int_a^b F_k(\gamma(t))\gamma_k'(t)\,dt = \sum_{k=1}^n \int_0^{L(\gamma)} F_k(\delta(s))\delta_k'(s)\,ds \\ &= \int_a^b \left\langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\right\rangle\,dt = \int_a^b F(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \end{aligned}$$

- $\displaystyle\int_\Gamma F(x)\,ds = \left[\begin{array}{ccc} \int_\Gamma F_1(x)\,ds & \cdots & \int_\Gamma F_n(x)\,ds \end{array}\right]^T$

- $\displaystyle\int_\Gamma f(x)\,dx = \left[\begin{array}{ccc} \int_\Gamma f(x)\,dx_1 & \cdots & \int_\Gamma f(x)\,dx_n \end{array}\right]^T$

$$\begin{aligned} &= \left[\begin{array}{ccc} \int_a^b f(\gamma(t)\gamma_1'(t)\,dt & \cdots & \int_a^b f(\gamma(t)\gamma_1'(t)\,dt \end{array}\right]^T \\ &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \end{aligned}$$

- $n = 3$: $\displaystyle\int_\Gamma F(x) \times dx = \int_a^b F(\gamma(t)) \times \gamma'(t)\,dt$

4.3 Skalar- und Vektorfelder

Definition 4.12 *Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Menge. Eine stetige Abbildung $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ nennt man* **Skalarfeld**, *eine stetige Abbildung $V : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$* **Vektorfeld**.

Grafisch lassen sich Skalarfelder durch **Höhenlinien** $\{x \in D : \varphi(x) = \text{const}\}$ und Vektorfelder durch Pfeile sowie durch **Stromlinien** veranschaulichen. Stromlinien sind Kurven $\Gamma \subset D$, für die $V(x)$ für jedes $x \in \Gamma$ Tangentialvektor ist.

Beispiel 4.13 *Skalarfelder:*

1. *Zentralkraftpotential:*
$$\varphi(x) = \frac{1}{|x|} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}}$$
Die Höhenlinien sind Kreise mit dem Mittelpunkt Θ.

2. $n = 2$: $\quad \varphi(x) = x_1 x_2$

Beispiel 4.14 *Vektorfelder:*

1. $V(x) = \lambda\, x \quad (\lambda = \text{const} > 0)$

2. *Gravitationsfeld einer Punktmasse im Punkt* Θ*:*
$$V(x) = -\gamma\, \frac{x}{|x|^3}$$

3. $n = 3$: $\quad V(x) = W \times x \quad$ (W *– konstanter Vektor*)

Ist $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ein gegebenes, stetig differenzierbares Skalarfeld, so ist

$$\nabla\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}^n\,,\ x \mapsto \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}^T$$

ein Vektorfeld. Dabei steht $(\nabla\varphi)(x)$ senkrecht auf der Höhenlinie durch den Punkt $x \in D$, d.h. es gilt $\langle \nabla\varphi, T\rangle = 0$, wobei T Tangentialvektor an die Höhenlinie ist: Sei nämlich $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Höhenlinie durch $x \in D$, d.h. $\varphi(\gamma(t)) = \text{const}$, $t \in [a, b]$. Dann folgt

$$0 = \frac{d}{dt}\,\varphi(\gamma(t)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\varphi((\gamma(t))}{\partial x_k}\,\gamma_k'(t)\,.$$

Definition 4.15 *Ein Vektorfeld* $V : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *heißt* **Potentialfeld**, *wenn ein Skalarfeld* $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *existiert, so dass*
$$V = \nabla\varphi \quad \textit{auf} \quad D$$
gilt. Das Skalarfeld nennt man dann ein **Potential** *von* V.

Wir stellen uns folgende Frage: Unter welchen Bedingungen ist ein gegebenes Vektorfeld $V : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein Potentialfeld?

Definition 4.16 *Eine offene Menge* G *nennt man* **zusammenhängend**, *wenn es zu zwei beliebigen Punkten aus* G *einen Weg in* G *gibt, der diese verbindet. Offene und zusammenhängende Mengen heißen* **Gebiete**.

1. Es sei $V : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ mit dem Potential $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}$. Ferner sei $\gamma : [a,b] \longrightarrow G$ ein beliebiger, stückweise glatter Weg in G. Dann folgt
$$\begin{aligned}\int_\Gamma V(x)\,dx &= \int_a^b V(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b (\nabla\varphi)(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_a^b \sum_{k=1}^n \frac{\partial\varphi(\gamma(t))}{\partial x_k}\gamma_k'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\,\varphi(\gamma(t))\,dt \\ &= \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)),\end{aligned}$$
d.h., das Integral ist **wegunabhängig**: Für jede stückweise glatte Kurve $\Gamma \subset G$ von x^a nach x^b gilt
$$\int_\Gamma V(x)\,dx = \varphi(x^b) - \varphi(x^a).$$

2. Die Integrale $\displaystyle\int_\Gamma V(x)\,dx$ seien im Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ wegunabhängig für das gegebene Vektorfeld $V : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Wir wählen einen Punkt $p^0 \in G$ fest und definieren
$$\varphi(x^0) := \int_{\Gamma(x^0)} V(x)\,dx\,, \quad x^0 \in G\,,$$
wobei $\Gamma(x^0) \subset G$ eine beliebige Kurve mit dem Anfangspunkt p^0 und dem Endpunkt x^0 ist. Wir bestimmen jetzt die partielle Ableitung der Funktion $\varphi(x)$ im Punkt $x^0 \in G$ in x_k–Richtung. Dazu legen wir von p^0 über x^0 hinaus einen Weg $\gamma_{x^0}(t)$ in G, so dass in einer Umgebung von x^0 gilt $\gamma_{x^0}(t) = x^0 + t\,e^k$, $-h \le t \le h$. Dabei bezeichnet e^k den k–ten kanonischen Einheitsvektor. Es folgt
$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left[\varphi(x^0 \pm h\,e^k) - \varphi(x^0)\right] &= \frac{1}{h}\int_0^h V(x^0 \pm t\,e^k)\gamma_{x^0}'(t)\,dt \\ &= \frac{1}{h}\int_0^h V_k(x^0 \pm t\,e^k)\,dt = V_k(x^0 \pm \xi_\pm e^k)\,, \quad 0 < \xi_\pm < h\,,\end{aligned}$$
so dass
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\varphi(x^0 + h\,e^k) - \varphi(x^0)\right] = V_k(x^0)$$
gilt. Also ist $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Potential von V.

3. Offenbar ist das Integral $\displaystyle\int_\Gamma V(x)\,dx$ im Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ genau dann wegunabhängig, wenn es für alle geschlossenen Kurven $\Gamma \subset G$ verschwindet.

4. Es sei $V : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein im Gebiet G stetig differenzierbares Potentialfeld. Dann existiert ein Skalarfeld $\varphi : G \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k} = V_k$ in G für $k = 1,\ldots,n$. Es folgt
$$\frac{\partial V_k}{\partial x_j} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}\,,$$

also

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_j} = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}, \quad j,k = 1,\dots,n, \quad \text{auf } G. \tag{4.1}$$

Diese Bedingung ist somit notwendig für die Existenz eines Potentials zu einem stetig differenzierbaren Vektorfeld V.

Frage: Ist diese Bedingung auch hinreichend?
Zur Beantwortung dieser Frage benötigen wir den Begriff des einfach zusammenhängenden Gebietes.

Definition 4.17 *Unter einer* **Deformation** *von Kurven in* G *versteht man eine stetige Abbildung* $h : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow G$. *(Man beachte:* $\gamma_s : [a,b] \longrightarrow G$, $t \mapsto h(t,s)$, *ist eine Schar von Wegen* γ_s, $s \in [0,1]$.*) Eine geschlossene Kurve* Γ *mit dem Weg* $\gamma : [a,b] \longrightarrow G \subset \mathbb{R}^n$ *nennt man im Gebiet* G **zusammenziehbar**, *wenn eine Deformation* $h : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow G$ *existiert, so dass*

$$h(t,0) = \gamma(t), \quad t \in [a,b],$$

und

$$h(t,1) \equiv \text{const}, \ t \in [a,b], \quad h(a,s) = h(b,s), \ s \in [0,1],$$

erfüllt ist. Ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ *heißt* **einfach zusammenhängend**, *wenn jede geschlossene Kurve in* G *zusammenziehbar ist.*

Satz 4.18 *Ein stetig differenzierbares Vektorfeld* $V : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet* G *ist genau dan ein Potentialfeld, wenn die* **Integrabilitätsbedingung** (4.1) *erfüllt ist.*

Satz 4.19 *Es sei* $V : Q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *ein auf dem Quader* $G = Q = (a_1,b_1) \times \cdots \times (a_n,b_n)$ *stetig differenzierbares Vektorfeld, welches der Bedingung* (4.1) *genügt. Dann ist*

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_k^0}^{x_k} V_k(x_1^0,\dots,x_{k-1}^0,t,x_{k+1},\dots,x_n)\,dt$$

für beliebiges, aber fest gewähltes $x^0 \in Q$ *ein Potential für* $V(x)$.

Bemerkung 4.20 *Ist* $V : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet* G, *welches der Bedingung* (4.1) *genügt, so ist durch*

$$\varphi(x) = \int_{\Gamma(x)} V(y)\,dy$$

ein Potential für $V(x)$ *gegeben, wobei* $\Gamma(x) \subset G$ *einen stückweise glatten Weg von einem fest gewählten Punkt* $x^0 \in G$ *nach* $x \in G$ *bezeichnet. Ist* G *konvex, so kann man für* $\Gamma(x)$ *die Strecke* $\left\{x^0 + t(x-x^0) : 0 \le t \le 1\right\}$ *wählen und erhält*

$$\varphi(x) = \int_0^1 V(x^0 + t(x-x^0))\,dt \cdot (x-x^0).$$

Ist $V : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *ein Potentialfeld, so ist sein Potential bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.*

Beispiel 4.21 *Für*

$$V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\,,\ (x_1,x_2) \mapsto \left(x_1x_2^4 + 2\,x_1^5\,,\ 2\,x_1^2x_2^3 - x_2^6\right)$$

erhalten wir

$$\varphi(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\,x_1^2x_2^4 + \frac{1}{3}\,x_1^6 - \frac{1}{7}\,x_2^7 + \text{const}\,.$$

Beispiel 4.22 *Sei $n = 3$. Das Gravitationsfeld eines Massepunktes in x^0 oder das elektrostatische Feld einer Punktladung in x^0*

$$V : \mathbb{R}^n \setminus \left\{x^0\right\} \longrightarrow \mathbb{R}^n\,,\ x \mapsto -\frac{\gamma(x - x^0)}{|x - x^0|^3}$$

ist ein Potentialfeld mit dem Newtonschen bzw. elektrostatischen Potential

$$\varphi(x) = \frac{\gamma}{|x - x^0|}\,.$$

Bei mehreren Punkten $x^1, \ldots, x^m$ ist

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\gamma_k}{|x - x^k|}\,.$$

Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ mit der Massendichte bzw. Ladungsdichte $\rho(x)$, $x \in G$, ist

$$\varphi(x) = \gamma \iiint_G \frac{\rho(y)\,dy}{|x - y|} = \gamma \iiint_G \frac{\rho(y)\,dy_1dy_2dy_3}{|x - y|} \quad \textit{(vgl. Abschnitt 4.5)} \quad .$$

Beispiel 4.23 *Das Vektorfeld*

$$V : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2\,,\ (x_1,x_2) \mapsto \left(-\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\,,\ \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right)$$

genügt zwar der Bedingung $\dfrac{\partial V_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial V_2}{\partial x_1}$, ist aber in $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ **kein** *Potentialfeld.*

4.4 Oberflächenintegrale

Definition 4.24 *Unter einem* **Flächenstück** *versteht man das Bild $\left\{f(u) : u \in \overline{D}\right\}$ einer stetig differenzierbaren Abbildung $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, wobei $D \subset \mathbb{R}^2$ eine offene und beschränkte Menge ist und $\operatorname{Rang} f'(u) = 2$ für alle $u \in D$ gilt.*

Es sei daran erinnert, dass

$$f'(u) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_2} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_2} \\[2ex] \dfrac{\partial f_3}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_3}{\partial u_2} \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f}{\partial u_2} \end{bmatrix}$$

und dass Rang $f'(u) = 2$, $u \in D$, die Eigenschaft

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} \times \frac{\partial f}{\partial u_2} \neq \Theta \quad \text{auf} \quad D$$

impliziert.

Beispiel 4.25 *Es sei $g : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann beschreibt*

$$f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3 , \ (u_1, u_2) \mapsto (u_1, u_2, g(u_1, u_2))$$

ein Flächenstück.

Beispiel 4.26 *Für $D = (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und eine Konstante $r > 0$ definieren wir*

$$f : \overline{D} \to \mathbb{R}^3 , \ (\varphi, \delta) \mapsto \begin{bmatrix} r \cos\varphi \cos\delta \\ r \sin\varphi \cos\delta \\ r \sin\delta \end{bmatrix} .$$

Dann ist $\left\{f(u) : u \in \overline{D}\right\}$ die Kugeloberfläche mit dem Radius r und dem Mittelpunkt Θ . Dabei ist

$$\text{Rang}\, f'(u) = 2 \ \forall\, u \in D , \ \text{aber Rang}\, f'\left(\varphi, \pm\frac{\pi}{2}\right) = 1 .$$

Es seien $F = \left\{f(u) : u \in \overline{D}\right\}$ ein Flächenstück und $x^0 = f(u^0) \in F$ ein fester Punkt auf F , $u^0 \in D$. Unter der **Tangentialebene** von F im Punkt x^0 verstehen wir die Ebene

$$\left\{\lambda_1 \frac{\partial f(u^0)}{\partial u_1} + \lambda_2 \frac{\partial f(u^0)}{\partial u_2} : \lambda \in \mathbb{R}^2\right\}$$

und unter der **Tangentenebene** an F in x^0 die Ebene

$$\left\{x^0 + \lambda_1 \frac{\partial f(u^0)}{\partial u_1} + \lambda_2 \frac{\partial f(u^0)}{\partial u_2} : \lambda \in \mathbb{R}^2\right\} .$$

Ist $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$ ein glatter Weg mit $\gamma(t_0) = u^0$, so ist $\delta : [a, b] \longrightarrow F$, $t \mapsto f(\gamma(t))$ ein glatter Weg in F durch den Punkt x^0 . Dabei gilt für den Tangentenvektor an die entsprechende Kurve im Punkt x^0 nach der Kettenregel

$$\delta'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) = \gamma_1'(t_0) \frac{\partial f(u^0)}{\partial u_1} + \gamma_2'(t_0) \frac{\partial f(u^0)}{\partial u_2} .$$

Dieser liegt also in der Tangentialebene von F in x^0 .

Der **Normalenvektor** von F in x^0 ist gegeben durch

$$\vec{n}(u^0) = \frac{\dfrac{\partial f(u^0)}{\partial u_1} \times \dfrac{\partial f(u^0)}{\partial u_2}}{\left|\dfrac{\partial f(u^0)}{\partial u_1} \times \dfrac{\partial f(u^0)}{\partial u_2}\right|} .$$

Es ist

$$\frac{\partial f(u^0)}{\partial u_1} \times \frac{\partial f(u^0)}{\partial u_2} = \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix}^T$$

mit

$$A = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_3}{\partial u_2} \end{bmatrix}_{u=u^0}, B = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_3}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_1)}{\partial u_2} \end{bmatrix}_{u=u^0}, C = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_2)}{\partial u_2} \end{bmatrix}_{u=u^0},$$

also

$$\vec{n}(u^0) = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix},$$

Für den Spezialfall aus Bsp. 4.25 erhalten wir

$$\vec{n}(u^0) = \frac{1}{\sqrt{\left[\dfrac{\partial g(u^0)}{\partial u_1}\right]^2 + \left[\dfrac{\partial g(u^0)}{\partial u_2}\right]^2 + 1}} \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial g(u^0)}{\partial u_1} \\ -\dfrac{\partial g(u^0)}{\partial u_2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Definition 4.27 *Die Parameterdarstellung $g : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eines Flächenstücks heißt zu $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ äquivalent, wenn ein Diffeomorphismus $\varphi : \overline{D} \longrightarrow \overline{G}$ existiert, so dass*

$$f(u) = g(\varphi(u)) \quad \textit{und} \quad \det\varphi'(u) > 0 \quad \forall\, u \in \overline{D}$$

gilt. Eine Flächenstück $F = \left\{f(u) : u \in \overline{D}\right\}$ nennt man **doppelpunktfrei**, *wenn $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$ injektiv ist. Für ein doppelpunktfreies Flächenstück F heißt eine Äquivalenzklasse von Parameterdarstellungen* **Orientierung** *von F. Die Parameterdarstellung g mit $f(u) = g(\psi(u))$ und $\psi(u) = (u_1, -u_2)$ ist ein Repräsentant der entgegengesetzten Orientierung.*

Beispiel 4.28 *Mit*

$$g(s) = \begin{bmatrix} s_1 - s_2 \\ s_1 + s_2 \\ s_1^2 - s_2^2 \end{bmatrix} \quad \textit{und} \quad \varphi(u) = \begin{bmatrix} \dfrac{u_1+u_2}{2} \\ \dfrac{u_2-u_1}{2} \end{bmatrix}$$

erhalten wir

$$\varphi'(u) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \text{ d.h. } \det\varphi'(u) = \frac{1}{2} > 0,$$

und die Parameterdarstellung

$$f(u) = g(\varphi(u)) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_1 u_2 \end{bmatrix}$$

einer Sattelfläche.

Unter einer **Fläche** verstehen wir die Vereinigung endlich vieler doppelpunktfreier Flächenstücke, die höchstens Randpunkte gemeinsam haben.

Der Flächeninhalt $A(\mathcal{F})$ eines Flächenstücks $\mathcal{F} = \left\{ f(u) : u \in \overline{D} \right\}$ ist gegeben durch

$$A(\mathcal{F}) = \iint_{\mathcal{F}} dS = \iint_{\overline{D}} \left| \frac{\partial f(u)}{\partial u_1} \times \frac{\partial f(u)}{\partial u_2} \right| du_1 du_2 \,.$$

Mit obigen Bezeichnungen gilt

$$\iint_{\mathcal{F}} dS = \iint_{\overline{D}} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, du_1 du_2 = \iint_{\overline{D}} \sqrt{EG - F^2} \, du_1 du_2 \,,$$

wobei

$$E = \left| \frac{\partial f}{\partial u_1} \right|^2 , \quad G = \left| \frac{\partial f}{\partial u_2} \right|^2 , \quad F = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2} \right\rangle .$$

Beispiel 4.29 *Für die Torusfläche $T = \left\{ f(\varphi, \delta) : (\varphi, \delta) \in \overline{D} \right\}$ mit $D = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$, $0 < r < R$ und*

$$f_1(\varphi, \delta) = (R + r\cos\delta)\cos\varphi \,, \quad f_2(\varphi, \delta) = (R + r\cos\delta)\sin\varphi \,, \quad f_3(\varphi, \delta) = r\sin\delta$$

erhalten wir $A(T) = 4\pi^2 rR$.

Definition 4.30 *Es seien $F = \left\{ f(u) : u \in \overline{D} \right\}$ ein Flächenstück und $g : F \longrightarrow \mathbb{R}$ sowie $V : F \longrightarrow \mathbb{R}^3$ stetige Funktionen. Wir definieren das* **Flächenintegral erster Art**

$$\iint_F g(x) \, dS = \iint_{\overline{D}} g(f(u)) \left| \frac{\partial f(u)}{\partial u_1} \times \frac{\partial f(u)}{\partial u_2} \right| du_1 du_2$$

und das **Flächenintegral zweiter Art**

$$\iint_F V(x) \, d\vec{S} = \iint_{\overline{D}} V(f(u)) \left(\frac{\partial f(u)}{\partial u_1} \times \frac{\partial f(u)}{\partial u_2} \right) du_1 du_2 \,.$$

Beachte: Es ist

$$d\vec{S} = \left(\frac{\partial f(u)}{\partial u_1} \times \frac{\partial f(u)}{\partial u_2} \right) du_1 du_2 = \vec{n}(u) dS \,.$$

Also gilt

$$\iint_F V(x) \, d\vec{S} = \iint_F V(x) \vec{n} \, dS$$

und

$$\iint_{-F} V(x)\, d\vec{S} = -\iint_F V(x)\, d\vec{S}\,.$$

Interpretationen: Ist g eine Massen- oder Ladungsdichte, so ist das entsprechende Flächenintegral erster Art gleich der Gesamtmasse bzw. Gesamtladung des Flächenstücks. Kennzeichnet V das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit, so ist das entsprechende Flächenintegral zweiter Art gleich der Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch F hindurchfließt.

4.5 Bereichsintegrale

Im Abschnitt 0.18.1 hatten wir den Begriff des Flächenintegrals kennengelernt. Dieser Begriff lässt sich auf natürliche Weise auf höhere Dimensionen erweitern. Ist z.B. $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ein n–dimensionaler Quader, so kann man das Integral $\int_Q f(x)\, dx_1 \cdots dx_n$ als iteriertes Integral

$$\int_Q f(x)\, dx_1 \cdots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \cdots dx_1$$

schreiben und berechnen. Auch den Begriff des Normalbereichs kann man verallgemeinern. Man versteht darunter eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, die sich z.B. in der Form

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a \le x_1 \le b\,,\ g_j(x_1, \ldots, x_j) \le x_{j+1} \le h_j(x_1, \ldots, x_j)\,,\ j = 1, \ldots, n-1\}$$

mit stetigen und reellwertigen Funktionen g_j, h_j schreiben lässt. Das entsprechende Integral kann dann wieder als iteriertes Integral geschrieben und berechnet werden:

$$\int_\Omega f(x)\, dx_1 \cdots dx_n = \int_a^b \left(\int_{g_1(x_1)}^{h_1(x_1)} \cdots \left(\int_{g_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{h_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \right) \cdots dx_2 \right) dx_1$$

Beispiel 4.31 *Es sei Ω das Tetraeder, welches von den Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ und $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ berandet wird. Dann ist*

$$\iiint_\Omega \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{(1 + x_1 + x_2 + x_3)^3} = \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right).$$

Ist $\varphi : \Sigma \longrightarrow \Omega\,,\ u \mapsto \begin{bmatrix} \varphi_1(u) & \cdots & \varphi_n(u) \end{bmatrix}^T$ eine Koordinatentransformation, so gilt die Transformationsregel

$$\int_\Omega f(x)\, dx_1 \cdots dx_n = \int_\Sigma f(\varphi(u)) \left|\det \varphi'(u)\right| du_1 \cdots du_n$$

(vgl. Abschnitt 0.18.2).

4.6 Integralsätze

Es seien $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und $V : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld (z.B. das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung). Mit $Q \subset G$ bezeichnen wir einen beliebigen Quader.

(a) Die Differenz zwischen dem aus dem Quader herausfließenden Volumen pro Zeiteinheit und dem in den Quader hineinfließenden Volumen pro Zeiteinheit ist gleich

$$\iint_{\partial Q} V(x)\, d\vec{S}\,,$$

wobei die Oberfläche ∂Q des Quaders Q so orientiert ist, dass die Flächennormale nach außen (also in $\mathbb{R}^3 \setminus Q$ hinein) zeigt.

(b) Es seien Δx_i , $i = 1, 2, 3$, die Seitenlängen von Q . Dann gilt

$$\text{mittlere Ergiebigkeit} = \frac{\text{Überschuss}}{\text{Volumen von } Q} = \frac{1}{\Delta x_1\, \Delta x_2\, \Delta x_3} \iint_{\partial Q} V(x)\, d\vec{S}\,.$$

(c) Die **Divergenz** (Ergiebigkeit) des Vektorfeldes V im Punkt x^0 ist gleich dem Grenzwert der mittleren Ergiebigkeit, wenn man Q auf den Punkt x^0 zusammenzieht:

$$\operatorname{div} V(x^0) := \lim_{|Q| \to 0, x^0 \in Q} \frac{1}{\Delta x_1\, \Delta x_2\, \Delta x_3} \iint_{\partial Q} V(x)\, d\vec{S}\,.$$

Ist $\operatorname{div} V(x^0) > 0$, so nennt man x^0 eine **Quelle** des Feldes V , ist $\operatorname{div} V(x^0) < 0$, so **Senke**.

(d) Es gilt

$$\iint_{\partial Q} V(x)\, d\vec{S} = \iiint_Q \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_2\,.$$

(e) Der Grenzübergang in (c) liefert somit

$$\operatorname{div} V(x^0) = \frac{\partial V_1(x^0)}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2(x^0)}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3(x^0)}{\partial x_3}\,.$$

Man nennt das Vektorfeld $V : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$ **quellenfrei**, wenn $\operatorname{div} V(x) = 0\ \forall\, x \in G$ gilt.

Unter (d) steht die "elementare" Form des Gaußschen Integralsatzes im $\mathbb{R}^3$. Für dessen allgemeine Formulierung benötigen wir folgende Definition.

Definition 4.32 *Eine kompakte Menge $B \subset \mathbb{R}^3$ heißt* **Bereich** *mit stückweise glattem Rand, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. $B = \overline{B}_0$, *wobei $B_0 \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge ist.*
2. *Der Rand ∂B von B ist eine Fläche, besteht also aus endlich vielen Flächenstücken.*
3. *Die Parameterdarstellungen $f_k : \overline{D}_k \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dieser Flächenstücke sind stetig differenzierbar, injektiv und erfüllen die Bedingung $\operatorname{Rang} f' = 2$ auf $\overline{D}_k$. Dabei sei $D_k \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, welches von endlich vielen stückweise glatten Kurven berandet wird.*
4. *Die Normalenvektoren auf ∂B weisen nach außen.*

Satz 4.33 (Gaußscher Integralsatz) *Ist $V : B \longrightarrow \mathbb{R}^3$ auf dem Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ mit stückweise glattem Rand stetig differenzierbar, so gilt*

$$\iint_{\partial B} V(x)\, d\vec{S} = \iiint_B \operatorname{div} V(x)\, dx_1 dx_2 dx_3 \,.$$

(f) Es sei $V : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, wobei D durch die stückweise glatte und geschlossene Kurve $\Gamma : x = \gamma(t)\,,\ t \in [a,b]\,,$ berandet werde. Wir definieren

$$B = \overline{D} \times [0,1] = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in \overline{D}, 0 \le x_3 \le 1 \right\}$$

und

$$\widetilde{V} : B \longrightarrow \mathbb{R}^3\,,\ x \mapsto \begin{bmatrix} V_1(x_1,x_2) \\ V_2(x_1,x_2) \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Mit $F = \Gamma \times [0,1]$ erhalten wir aus Satz 4.33

$$\iint_D \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \iiint_B \operatorname{div} \widetilde{V}(x)\, dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial B} \widetilde{V}(x)\, d\vec{S} = \iint_F \widetilde{V}(x)\, d\vec{S}\,,$$

wobei F die Parameterdarstellung

$$f(t,z) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ z \end{bmatrix}, \quad a \le t \le b,\ 0 \le z \le 1\,,$$

mit der nach außen gerichteten Flächennormalen $\vec{n} = \begin{bmatrix} \gamma_2' & -\gamma_1' & 0 \end{bmatrix}^T$ gestattet. Also gilt $d\vec{S} = \vec{n}\, dtdz$ und

$$\iint_F \widetilde{V}(x)\, d\vec{S} = \int_0^1 \int_a^b \widetilde{V}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), z) \vec{n}(t)\, dtdz = \int_a^b \left[V_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) - V_2(\gamma(t))\gamma_1'(t) \right] dt\,,$$

so dass

$$\int_\Gamma (V_1 dx_2 - V_2 dx_1) = \iint_D \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \,.$$

Das ist der Gaußsche Integralsatz in der Ebene (vgl. Satz 0.116).

(g) Es seien $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{R}$ ein stetig differenzierbares Skalarfeld auf dem Bereich B mit stückweise glattem Rand und $a \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger, aber fest gewählter Vektor. Wir betrachten das Vektorfeld $V(x) = \varphi(x)\, a\,,\ x \in B\,.$ Aus dem Gaußschen Integralsatz 4.33 folgt dann

$$\iint_{\partial B} \varphi(x)\, d\vec{S} \cdot a = \iiint_B \nabla\varphi(x)\, dx_1 dx_2 dx_2 \cdot a \,.$$

Da diese Beziehung für alle $a \in \mathbb{R}^3$ gilt erhalten wir den Gaußschen Integralsatz für Skalarfelder

$$\iint_{\partial B} \varphi(x)\, d\vec{S} = \iiint_B \nabla\varphi(x)\, dx_1 dx_2 dx_2\,,$$

wobei die Integrale komponentenweise zu bilden sind.

Beispiel 4.34 *Ein Körper B schwimme in einer Flüssigkeit mit dem spezifischen Gewicht ρ. Mit B^* bezeichnen wir den Teil von B, der sich unter der Flüssigkeitsoberfläche befindet. Die Gesamthöhe des Flüssigkeitsstandes sei $h > 0$. Dann ist die Druckverteilung durch*

$$p(x) = \begin{cases} p_0 & : \quad x_3 \geq h\,, \\ p_0 + \rho(h - x_3) & : \quad 0 \leq x_3 < h\,, \end{cases}$$

gegeben, wobei p_0 der Luftdruck über der Flüssigkeitsoberfläche ist. Der Auftrieb A ist definiert als die Kraft, die durch den Druck erzeugt wird. Dabei ist zu beachten, dass der Druck der nach außen gerichteten Flächennormalen entgegenwirkt. Es gilt also

$$\begin{aligned} A &= -\iint_{\partial B} p(x)\, d\vec{S} = -\iint_{\partial B^*} p(x)\, d\vec{S} = -\iiint_{B^*} \nabla p(x)\, dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= -\iiint_{B^*} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho \end{bmatrix} dx_1 dx_2 dx_3 = \rho\, I(B^*) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

wobei $I(B^*)$ das Volumen von B^* bezeichnet. Das ist genau das Archimedessche Auftriebsgesetz: Die Auftriebskraft ist dem Betrag nach gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit.

(h) Unter der **Zirkulation** eines Vektorfeldes $V : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$ längs der geschlossenen Kurve $\Gamma \subset G$ verstehen wir das Kurvenintegral zweiter Art

$$\int_\Gamma V(x)\, dx\,.$$

Definition 4.35 *Ein Flächenstück $F = \left\{f(u) : u \in \overline{D}\right\} \subset G$ nennt man* **einfach**, *wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Die Abbildung $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ist injektiv, und es gilt $\operatorname{Rang} f'(u) = 2$ für alle $u \in \overline{D}$.*
2. *D ist einfach zusammenhängend mit stückweise glattem Rand.*
3. *D ist positiv orientiert, d.h. D liegt links von ∂D.*

(i) Es seien $V : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld und $F \subset G$ ein einfaches Flächenstück mit dem Rand ∂F. Die mittlere Wirbelstärke von V bzgl. F ist dann gleich

$$\frac{1}{A(F)} \int_{\partial F} V(x)\, dx$$

und die **Wirbelstärke** im Punkt $x^0 \in G$ bzgl. der Richtung $\vec{n}$ gleich

$$W_{\vec{n}}(x^0) = \lim_{A(F) \to 0,\, x^0 \in F} \frac{1}{A(F)} \int_{\partial F} V(x)\, dx\,,$$

wobei der Grenzwert über ebene Flächenstücke mit der Normalenrichtung $\vec{n}$ zu nehmen ist. Es sei z.B.

$$\partial F : \gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ x_3^0 \end{bmatrix}, \quad a \le t \le b\,.$$

Dann folgt unter Verwendung von (f)

$$\begin{aligned} \int_{\partial F} V(x)\,dx &= \int_a^b V(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_{\partial F} [V_1(x)\,dx_1 + V_2(x)\,dx_2] \\ &= \iint_F \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2\,, \end{aligned}$$

also

$$W_{\vec{n}}(x^0) = \frac{\partial V_2(x^0)}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1(x^0)}{\partial x_2}, \quad \vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Allgemein gilt

$$W_{\vec{n}}(x^0) = \left\langle \operatorname{rot} V(x^0), \vec{n} \right\rangle, \quad \operatorname{rot} V(x^0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V_3(x^0)}{\partial x_2} - \dfrac{\partial V_2(x^0)}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial V_1(x^0)}{\partial x_3} - \dfrac{\partial V_3(x^0)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial V_2(x^0)}{\partial x_1} - \dfrac{\partial V_1(x^0)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \right]_{k=1}^3 \times V(x^0)\,.$$

(j) Es seien $V : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $F = \left\{ f(u) : u \in \overline{D} \right\} \subset G$ ein einfaches Flächenstück, f zweimal stetig differenzierbar und $\partial D = \{\gamma(t) : a \le t \le b\}$ stückweise glatt, so dass $\partial F = \{f(\gamma(t)) : a \le t \le b\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial F} V(x)\,dx &= \int_a^b V(f(\gamma(t))) \cdot \left[f'(\gamma(t))\gamma'(t) \right] dt \\ &= \int_a^b V(f(\gamma(t)))^T \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\gamma(t))}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f(\gamma(t))}{\partial u_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{bmatrix} dt \\ &= \int_a^b \left[V(f(\gamma(t)))^T \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial u_1} \gamma_1'(t) + V(f(\gamma(t)))^T \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial u_2} \gamma_2'(t) \right] dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\partial D} V(f(u))^T \frac{\partial f(u)}{\partial u_1} du_1 + V(f(u))^T \frac{\partial f(u)}{\partial u_2} du_2 \\
&\stackrel{(f)}{=} \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(V(f(u))^T \frac{\partial f(u)}{\partial u_2}\right) - \frac{\partial}{\partial u_2}\left(V(f(u))^T \frac{\partial f(u)}{\partial u_1}\right)\right] du_1 du_2 \\
&= \iint_D \left[\left(V'(f(u)) \frac{\partial f(u)}{\partial u_1}\right)^T \frac{\partial f(u)}{\partial u_2} - \left(V'(f(u)) \frac{\partial f(u)}{\partial u_2}\right)^T \frac{\partial f(u)}{\partial u_1}\right] du_1 du_2 \\
&= \iint_D \frac{\partial f(u)}{\partial u_2}^T \left[V'(f(u)) - V'(f(u))^T\right] \frac{\partial f(u)}{\partial u_1} du_1 du_2 \,.
\end{aligned}
$$

Für einen konstanten Vektor $a = \left[\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array}\right]^T \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$
\left[V'(x) - V'(x)^T\right] a = \left[\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial V_j(x)}{\partial x_k} - \frac{\partial V_k(x)}{\partial x_j}\right) a_k\right]_{j=1}^{3} = \operatorname{rot} V(x) \times a \,.
$$

Also ist

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial F} V(x)\, dx &= \iint_D \frac{\partial f(u)}{\partial u_2}^T \left[\operatorname{rot} V(f(u)) \times \frac{\partial f(u)}{\partial u1}\right] du_1 du_2 \\
&= \iint_D \operatorname{rot} V(f(u)) \cdot \left[\frac{\partial f(u)}{\partial u_1} \times \frac{\partial f(u)}{\partial u_2}\right] du_1 du_2 \\
&= \iint_F \operatorname{rot} V(x)\, d\vec{S} \,.
\end{aligned}
$$

Satz 4.36 (Stokesscher Integralsatz) *Sind $V : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $F \subset G$ ein einfaches Flächenstück, so gilt*

$$
\int_{\partial F} V(x)\, dx = \iint_F \operatorname{rot} V(x)\, d\vec{S} \,.
$$

Interpretation: Die Zirkulation entlang einer Kurve ist gleich dem Integral über alle Wirbelstärken auf einem Flächenstück, welches von dieser Kurve berandet wird, also gleich dem Wirbelfluss durch dieses Flächenstück.

Folgerung 4.37 *Es seien $V : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $B \subset G$ ein stückweise glatt berandeter Bereich. Dann gilt*

$$
\iint_{\partial B} \operatorname{rot} V(x)\, d\vec{S} = 0 \,,
$$

d.h. der Wirbelfluss durch eine geschlossene Fläche ist gleich Null.

Folgerung 4.38 *Wir betrachten den ebenen Fall* $V : G \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $G \subset \mathbb{R}^2$. *Sei* $D \subset G$ *mit* $\partial D = \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}$. *Dann folgt*

$$\int_{\partial D} V(x_1, x_2)\, dx = \int_{\partial D} [V_1\, dx_1 + V_2\, dx_2] = \iint_D \operatorname{rot} V(x)\, d\vec{S} = \iint_D \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \,.$$

In der Ebene sind also Stokesscher und Gaußscher Integralsatz identisch.

4.7 Einige Folgerungen aus dem Stokesschen und dem Gaußschen Integralsatz

1. Wir vereinbaren einige Schreibweisen den Nabla-Operator

$$\nabla = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

betreffend.

   (a) Ist $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}$, so $\nabla\varphi = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3} \end{bmatrix}^T =: \operatorname{grad}\varphi$.

   (b) Ist $V : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$, so $\nabla \cdot V = \dfrac{\partial V_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial V_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial V_3}{\partial x_3} = \operatorname{div} V$ und $\nabla \times V = \operatorname{rot} V$.

   (c) Für $\varphi, \psi : G \longrightarrow \mathbb{R}$, $V, W : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \nabla(\lambda\, \varphi + \mu\, \psi) &= \lambda\, \nabla\varphi + \mu\, \nabla\psi \,, \\ \nabla \cdot (\lambda\, V + \mu\, W) &= \lambda\, \nabla \cdot V + \mu\, \nabla \cdot W \,, \\ \nabla \times (\lambda\, V + \mu\, W) &= \lambda\, \nabla \times V + \mu\, \nabla \times W \,. \end{aligned}$$

   (d) $a \in \mathbb{R}^3$: $\quad a \cdot \nabla = a_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \dfrac{\partial}{\partial x_3}$

   (e) $(\nabla \cdot \nabla)\varphi = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} = \Delta\varphi = \nabla \cdot (\nabla\varphi) = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$

2. Varianten des Gaußschen Integralsatzes:

   (a) $$\iint_{\partial B} V(x)\, d\vec{S} = \iiint_B (\operatorname{div} V)(x)\, dx_1 dx_2 dx_3$$

   (b) $$\iint_{\partial B} \varphi(x)\, d\vec{S} = \iiint_B (\nabla\varphi)(x)\, dx_1 dx_2 dx_3$$

(c) $$\iint_{\partial B} d\vec{S} \times V(x) = \iiint_B \operatorname{rot} V(x)\, dx_1 dx_2 dx_3$$

3. Varianten des Stokesschen Integralsatzes:

   (a) $$\int_{\partial F} V(x)\, dx = \iint_F \operatorname{rot} V(x)\, d\vec{S}$$

   (b) $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}$: $$\int_{\partial F} \varphi(x)\, dx = \iint_F d\vec{S} \times (\nabla\varphi)(x)$$

   (c) $V : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$: $$\int_{\partial F} dx \times V(x) = \iint_F \left(d\vec{S} \times \nabla\right) \times V(x)$$

4. Formeln der partiellen Integration

   Es seien $\varphi, \psi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen und $B \subset G \subset \mathbb{R}^3$ ein Bereich mit stückweise glattem Rand. Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes erhält man analog zu den Betrachtungen im Abschnitt 3.9.1

   (a) die **erste Greensche Formel**

   $$\iint_{\partial B} \varphi \frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\, dS = \iiint_B (\varphi\Delta\psi + \nabla\varphi\nabla\psi) dx_1 dx_2 dx_3\,,$$

   für den Spezialfall $\varphi \equiv 1$ also

   $$\iint_{\partial B} \frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\, dS = \iiint_B \Delta\psi\, dx_1 dx_2 dx_3\,,$$

   (b) die **zweite Greensche Formel**

   $$\iint_{\partial B} \left(\varphi \frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}} - \psi \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\right) dS = \iiint_B (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\, dx_1 dx_2 dx_3\,.$$

4.8 Wirbel- und quellfreie Felder

Es seien $G \subset \mathbb{R}^3$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. $V : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein zweimal stetig differenzierbares Skalar- bzw. Vektorfeld.

1. Aus $\operatorname{div}\operatorname{rot} V(x) = \nabla\cdot(\nabla\times V(x)) = (\nabla\times\nabla)\cdot V(x) = 0$ folgt: Jedes Wirbelfeld ist quellfrei.

   Aus $\operatorname{rot}\nabla\varphi = \nabla \times (\nabla\varphi) = \Theta$ folgt: Jedes Potentialfeld ist wirbelfrei.

2. V ist genau dann ein Potentialfeld, wenn (vgl. Satz 4.18) es wirbelfrei ist, d.h.

   $$\exists\, \psi : G \longrightarrow \mathbb{R} : V = \nabla\psi \iff \operatorname{rot} V = \Theta\,.$$

3. Es seien $\operatorname{rot} V = \Theta$ und $\operatorname{div} V = 0$. Dann existiert ein Potential $\psi : G \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $V = \nabla\psi$. Es folgt

   $$\operatorname{div}\nabla\psi = \Delta\psi = 0 \quad \text{auf} \quad G$$

   (Laplace-Gleichung, Potentialgleichung). Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $\psi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **harmonisch** auf G, wenn $(\Delta\psi)(x) = 0\ \forall\, x \in G$ gilt.

4. Eine auf $G \cup \partial G$ stetige und in G harmonische, nicht konstante Funktion nimmt ihren größten und kleinsten Funktionswert nur auf dem Rand von G an (**Maximumprinzip**). Das **Dirichlet-Problem**

$$\Delta\psi = 0 \quad \text{auf} \quad G\,, \quad \psi(x) = g(x)\ \forall\, x \in \partial G$$

($g : \partial G \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig) besitzt höchstens eine Lösung.

5. Das **gemischte Randwertproblem**

$$\Delta\psi = 0 \quad \text{auf} \quad G\,, \quad \frac{\partial\psi(x)}{\partial\vec{n}} + h(x)\psi(x) = g(x)\ \forall\, x \in \partial G$$

($g, h : \partial G \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $h \geq 0\,,\ h \not\equiv 0$) besitzt höchstens eine Lösung.

6. Zwei Lösungen des **Neumann-Problems**

$$\Delta\psi = 0 \quad \text{auf} \quad G\,, \quad \frac{\partial\psi(x)}{\partial\vec{n}} = 0\ \forall\, x \in \partial G$$

unterscheiden sich nur durch eine Konstante.

7. Das **Poisson-Problem**

$$\Delta\psi = f \quad \text{auf} \quad G\,, \quad \psi(x) = g(x)\ \forall\, x \in \partial G$$

($f : G \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ g : \partial G \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig) kann in die zwei Probleme

$$\Delta\psi_1 = f \quad \text{auf} \quad G\,, \quad \psi_1 = 0 \quad \text{auf} \quad \partial G$$

und

$$\Delta\psi_2 = 0 \quad \text{auf} \quad G\,,\ \psi_2 = g \quad \text{auf} \quad \partial G$$

zerlegt werden.

8. Man nennt $W : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein **Wirbelfeld**, wenn ein **Vektorpotential** $A : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$ existiert, so dass $W = \operatorname{rot} A$ gilt. Aus $\operatorname{div}\operatorname{rot} A = 0$ folgt, dass die Bedingung $\operatorname{div} W = 0$ notwendig dafür ist, dass W ein Wirbelfeld ist (vgl. 1.).

9. Es seien $\operatorname{div} W = 0$ auf G und $x^0 \in G$. Wir definieren

$$A(x) = \int_0^1 t\left[W(x^0 + t(x - x^0)) \times (x - x^0)\right]\,dt\,.$$

(G sei dabei als sternförmig vorausgesetzt und x^0 ein Zentrum von G.) Es folgt

$$\begin{aligned}
(\operatorname{rot} A)(x) &= \int_0^1 t\left[W(x^0+t(x-x^0))\operatorname{div}(x-x^0)\right. \\
&\qquad \left. +t\,W'(x^0+t(x-x^0))(x-x^0) - W(x^0+t(x-x^0))\right]\,dt \\
&= \int_0^1 \left[2t\,W(x^0+t(x-x^0)) + t^2\frac{d}{dt}\,W(x^0+t(x-x^0))\right]\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[t^2 W(x^0+t(x-x^0))\right]\,dt = \left[t^2 W(x^0+t(x-x^0))\right]_0^1 \\
&= W(x)\,.
\end{aligned}$$

Also ist $A(x)$ ein Vektorpotential von W und die Bedingung $\operatorname{div} W = 0$ unter den gemachten Voraussetzungen auch hinreichend dafür, dass W ein Wirbelfeld ist.

10. Ist $W = \operatorname{rot} A$, so folgt $W = \operatorname{rot}(A+\nabla\varphi)$, d.h. $A+\nabla\varphi$ ist auch Vektorpotential von W für jedes zweimal stetig differenzierbare Skalarfeld φ. Ist umgekehrt $W = \operatorname{rot} A = \operatorname{rot} B$, so folgt $\operatorname{rot}(A-B) = \Theta$. Dann existiert aber ein Skalarfeld ψ mit $B - A = \nabla\psi$. Also: Das Vektorpotential eines quellfreien Feldes ist bis auf ein additives Gradientenfeld eindeutig bestimmt.

11. Wir suchen zu einem quellfreien Vektorfeld ein quellfreies Vektorpotential. Sei also $W = \operatorname{rot} A$. Zu finden ist dann ein Skalarfeld $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\operatorname{div}(A+\nabla\varphi) = 0$, d.h.
$$\Delta\varphi = -\operatorname{div} A\,.$$

12. Die Gleichung $\Delta\varphi = \operatorname{div} V$ sei auf G lösbar. Dann folgt $\operatorname{div}(V-\nabla\varphi) = 0$. Somit existiert ein Vektorfeld $A : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $V - \nabla\varphi = \operatorname{rot} A$, d.h. V lässt sich als Summe eines quell- und eines wirbelfreien Feldes schreiben.

4.9 Übungsaufgaben

1. Berechnen Sie
   (a) $\displaystyle\int_\Gamma x_1x_2x_3\,ds$, wobei $\Gamma\left\{(x_1,x_2,x_3) = \left(t, \tfrac{1}{3}\sqrt{8\,t^3}, \tfrac{1}{2}\,t^2\right) : 0 \le t \le 1\right\} \subset \mathbb{R}^3$,
   (b) $\displaystyle\int_\Gamma \sqrt{x_1^2+x_2^2}\,ds$, wobei $\Gamma = \{(x_1,x_2) = (e^\varphi\cos\varphi, e^\varphi\sin\varphi) : 0 \le \varphi \le 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2$,
   (c) **(HA)** die Länge eines Stücks $\{(a\,t\cos t, a\,t\sin t) : 0 \le t \le 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2$ der Archimedesschen Spirale.

2. **(HA)** Berechnen Sie die Länge des Weges, den ein Punkt P auf der Peripherie einer kreiszylindrischen Schraube mit Radius r und Ganghöhe $2\pi c$ beim Drehen der Schraube zurücklegt, wobei die Schraube eine zweimalige Volldrehung ausführen soll.

3. Man berechne die Masse des Bogens der Kurve $y = \ln x$ zwischen den Punkten mit den Abszissen $x_1 > 0$ und $x_2 > x_1$, wenn die Dichte der Kurve in jedem Punkt gleich dem Quadrat seiner Abszisse ist.

4. Berechnen Sie folgende Kurvenintegrale zweiter Art:
   (a) $\displaystyle\int_\Gamma (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$ mit $\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$,
   (b) **(HA)** $\displaystyle\int_\Gamma (-y\,dx + x\,dy)$, wobei $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ der Polygonzug von $(0,0)$ über $(1,0)$ nach $(1,1)$ ist.

5. Man bestimme den Wert des Kurvenintegrals $I = \displaystyle\int_\Gamma 2xy\,dx + x^2\,dy$ entlang des Weges $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, der die Punkte (0,0) und (1,1) über
   (a) die Gerade $y = x$,
   (b) die Parabel $y = x^2$,
   (c) die Parabel $y^2 = x$,
   (d) die kubische Parabel $y = x^3$

   verbindet.

6. Man berechne $I = \displaystyle\int_\Gamma xy\,dx + (y-x)\,dy$ entlang der Integrationswege aus Aufgabe 5.

7. Berechnen Sie $\displaystyle\int_\Gamma (y+3z)\,dx + (2z+x)\,dy + (3x+2y)dz$, wobei
$$\Gamma = \left\{(x,y,z) = \left(a\cos\varphi, a\sin\varphi, \frac{2a\varphi}{\pi}\right) : 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\} \subset \mathbb{R}^3 .$$

8. **(HA)** Gegeben seien die Kraftfelder (a) $F(x,y) = (x+y, 2x)$ und (b) $F(x,y) = (x+y, x)$. Berechnen Sie die Arbeit bei der Verschiebung eines Massenpunktes längs der Einheitskreislinie $\{(\cos t, \sin t) : 0 \le t \le 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2$. Wie kann für das Kraftfeld (b) die Arbeit längs einer beliebigen stückweise glatten Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ berechnet werden?

9. Unter Wirkung des Kraftfeldes $F(x,y) = (2xy, x^2 + y^2)$ bewege sich ein Massenpunkt auf der Parabel $y = x^2$ vom Punkt $(1,1)$ zu dem Punkt $(2,4)$. Welche Arbeit wird hierbei geleistet?

10. Berechnen Sie
$$\int_\Gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2+1},$$
wobei $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ Rand des kleinen Kreissegmentes ist, das durch $x + y = 1$ und $x^2 + y^2 = 1$ begrenzt wird.

4.10 Der Satz über implizite Funktionen

Problem: Wann kann man eine Gleichung

$$f(x_1, x_2) = 0 \tag{4.2}$$

nach x_2 auflösen, d.h. x_2 als Funktion von x_1 darstellen, $x_2 = g(x_1)$?

Es sind verschiedenste Situationen denkbar, z.B.:

- $2x_1^2 + 3x_2 = 0 \implies x_2 = -\dfrac{2x_1^2}{3}$.
- $x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0 \implies x_2 = \sqrt{x_1^2 + 1}$ oder $x_2 = -\sqrt{x_1^2 + 1}$.
- $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0 \implies$ Kein Punkt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt diese Gleichung.

Nehmen wir an, es gibt ein Intervall (a, b) , so dass $x_2 = g(x_1)$ und $f(x_1, g(x_1)) = 0$ für alle $x_1 \in (a, b)$ gilt. Dann folgt

$$\frac{\partial f(x_1, g(x_1))}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x_1, g(x_1))}{\partial x_2} g'(x_1) = 0 \,,$$

so dass unter der Voraussetzung $\dfrac{\partial f(x_1, g(x_1))}{\partial x_2} \neq 0$ die Beziehung

$$g'(x_1) = -\frac{\dfrac{\partial f(x_1, g(x_1))}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f(x_1, g(x_1))}{\partial x_2}}$$

gilt.

Satz 4.39 (Satz über implizite Funktionen, 2–dim. Fall) *Es seien $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar,*

$$f(x_1^0, x_2^0) = 0 \,, \quad (x_1^0, x_2^0) \in D \quad \textit{und} \quad \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \neq 0 \,.$$

Dann existieren offene Intervalle $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}$ mit $x_1^0 \in U_1$ und $x_2^0 \in U_2$, so dass zu jedem $x_1 \in U_1$ genau ein $x_2 \in U_2$ existiert mit $f(x_1, x_2) = 0$, also $x_2 = g(x_1)$ durch (4.2) auf U_1 definiert ist. Dabei ist $g : U_1 \longrightarrow U_2$ stetig differenzierbar, und es gilt

$$g'(x) = -\frac{\dfrac{\partial f(x, g(x))}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f(x, g(x))}{\partial x_2}} \,, \quad x \in U_1 \,.$$

Satz 4.40 (Satz über implizite Funktionen, allg. Fall) *Die Menge* $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *sei offen und* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *sei stetig differenzierbar. Für einen Punkt* $(x^0, y^0) = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0) \in D$ *gelte*

$$f(x^0, y^0) = \Theta\,.$$

Ferner sei die Matrix

$$f_y(x^0, y^0) = \left[\frac{\partial f_i(x^0, y^0)}{\partial y_k} \right]_{i=1,k=1}^{m \quad m}$$

regulär. Dann existieren offene Umgebungen $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ *und* $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ *von* x^0 *bzw.* y^0 *, so dass zu jedem* $x \in U_1$ *genau ein* $y \in U_2$ *mit* $f(x, y) = \Theta$ *existiert, wodurch die Funktion* $y = g(x)$ *auf* U_1 *erklärt ist. Dabei gilt*

$$g'(x) = -\left[f_y(x, g(x))\right]^{-1} f_x(x, g(x))\,, \quad x \in U_1\,,$$

mit

$$f_x(x, y) = \left[\frac{\partial f_i(x, y)}{\partial x_k} \right]_{i=1,k=1}^{m \quad n}.$$

4.11 Extrema unter Nebenbedingungen

Wir suchen ein Extremum der Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}$ unter den m Nebenbedingungen

$$\Phi_i(x_1, \ldots, x_{n+m}) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, m\,. \tag{4.3}$$

Wir setzen voraus, dass die Matrix

$$\left[\frac{\partial \Phi_i(x)}{\partial x_k} \right]_{i=1,\,k=1}^{m \;\; n+m}$$

für alle $x = (x_1, \ldots, x_{n+m}) \in D$, die (4.3) genügen, den Rang m hat. O.E.d.A. sei die Matrix

$$\left[\frac{\partial \Phi_i(x)}{\partial x_k} \right]_{i=1,k=n+1}^{m \quad n+m}$$

für alle $x \in D$, die (4.3) erfüllen, regulär.

Es sei nun $x^0 \in D$ ein Extremalpunkt unter den Nebenbedingungen (4.3). Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ und Funktionen $\varphi_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x_{n+i} = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)\,, \quad i = 1, \ldots, m\,,$$

anstelle von (4.3). Damit ist $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ ein Extremalpunkt von $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x') = f(x', \varphi_1(x'), \ldots, \varphi_m(x')) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \Phi_i(x', \varphi_1(x'), \ldots, \varphi_m(x'))\,,\ x' = (x_1, \ldots, x_n)\,,$$

wobei die $\lambda_i \in \mathbb{R}$ vorerst noch unbestimmte Faktoren sind. Es folgt

$$\frac{\partial F(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_j} = 0\,, \quad j = 1, \dots, n\,,$$

also (für $x = x^0$)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial f}{\partial x_{n+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right] + \sum_{k=1}^m \lambda_k \left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_{n+i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right] \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial f}{\partial x_{n+i}} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_{n+i}} \right] \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j}\,, \quad j = 1, \dots, n\,. \end{aligned}$$

Unter den gemachten Voraussetzungen existieren Zahlen λ_k^0, $k = 1, \dots, m$, mit

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial \Phi_k(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_{n+i}} \lambda_k^0 = -\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_{n+i}}\,, \quad i = 1, \dots, m\,,$$

und wir erhalten die $n + m$ Gleichungen

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial \Phi_k(x)}{\partial x_j} = 0\,, \quad j = 1, \dots, n+m\,, \tag{4.4}$$

zusammen mit den m Nebenbedingungen (4.3) zur Bestimmung von

$$x_1^0, \dots, x_{n+m}^0, \lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0\,.$$

Die Zahlen λ_k heißen **Lagrangesche Multiplikatoren**.

Es sei bemerkt, dass in (4.3) und (4.4) die unabhängigen Veränderlichen $x_1, \dots, x_{n+m}$ gleichberechtigt auftreten, obwohl dies in der Herleitung nicht der Fall war. Die Bedingungen (4.4) sind lediglich notwendig für das Vorliegen eines lokalen Extrempunktes in $x^0 \in D$ unter den Nebenbedingungen (4.3).

Beispiel 4.41 *Sei $a > 0$. Man bestimme die Extremalwerte von*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4\,, \quad x_k > 0\,,\ k = 1, 2, 3, 4\,,$$

unter der Nebenbedingung

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = a^4\,.$$

Beispiel 4.42 *Es seien $a > b > c > 0$ und $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir schneiden das Ellipsoid*

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \right\}$$

mit der Ebene

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \alpha\, x_1 + \beta\, x_2 + \gamma\, x_3 = 0 \right\}$$

und suchen die Längen der Halbachsen der Schnittellipse.

4.12 Der Begriff des Tensors

Es sei $\mathbf{V}$ ein $\mathbb{R}$–Vektorraum.

Definition 4.43 *Unter einem* **Tensor nullter Stufe** *versteht man einen Skalar (d.h. eine reelle Zahl). Ein* **Tensor m-ter Stufe** *($m \in \mathbb{N}$) ist eine Abbildung*

$$T : \mathbf{V}^m \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad (\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^m) \mapsto T(\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^m)$$

mit der Eigenschaft, dass aus $\mathbf{x}^k = \lambda\mathbf{y} + \mu\mathbf{z}$, $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ stets

$$T(\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^m) = \lambda T(\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^{k-1}, \mathbf{y}, \mathbf{x}^{k+1}, \ldots, \mathbf{x}^m) + \mu T(\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^{k-1}, \mathbf{z}, \mathbf{x}^{k+1}, \ldots, \mathbf{x}^m)$$

folgt.

Beispiel 4.44 *Bezeichnen $\langle .,. \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbf{V}$ und $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ einen fest gewählten Vektor, so ist durch*

$$T_1 : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad \mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

ein Tensor erster Stufe gegeben. Dagegen beschreibt

$$T_2 : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) \mapsto \left\langle \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \right\rangle$$

einen Tensor zweiter Stufe.

Beispiel 4.45 *Es sei $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$. Dann ist durch das Spatprodukt dreier Vektoren ein Tensor dritter Stufe definiert.*

Es seien nun $\left\{\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n\right\}$ eine Basis in $\mathbf{V}$ und $T : \mathbf{V}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Tensor m–ter Stufe. Die Zahlen

$$t_{i_1 i_2 \cdots i_m} = T(\mathbf{b}^{i_1}, \mathbf{b}^{i_2}, \ldots, \mathbf{b}^{i_m})\,, \quad (i_1, i_2, \ldots, i_m) \in \{1, 2, \ldots, n\}^m$$

nennt man die **Koordinaten** des Tensors T in der gegebenen Basis. Ist eine Basis $\left\{\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n\right\}$ von $\mathbf{V}$ festgelegt, so ist umgekehrt durch die Angabe der Koordinaten $t_{i_1 i_2 \cdots i_m}$, $(i_1, i_2, \ldots, i_m) \in \{1, 2, \ldots, n\}^m$, ein Tensor m–ter Stufe definiert.

Beispiel 4.46 *Es sei $\mathbf{g} = \left\{\mathbf{g}^1, \ldots, \mathbf{g}^n\right\}$ eine Basis in $\mathbf{V}$. Wir betrachten einen Tensor zweiter Stufe $T : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ und verwenden die Bezeichnungen $a^{\mathbf{g}} = \left[\ a_k^{\mathbf{g}}\ \right]_{k=1}^n$, $b^{\mathbf{g}} = \left[\ b_k^{\mathbf{g}}\ \right]_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$, wobei*

$$\mathbf{a} = \sum_{k=1}^n a_k^{\mathbf{g}} \mathbf{g}^k \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \sum_{k=1}^n b_k^{\mathbf{g}} \mathbf{g}^k$$

gelte. Dann gilt mit $T_{\mathbf{g}} = \left[\ t_{jk}^{\mathbf{g}}\ \right]_{j,k=1}^n$, $t_{jk}^{\mathbf{g}} = T(\mathbf{g}^j, \mathbf{g}^k)$,

$$T(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^n a_j^{\mathbf{g}} \sum_{k=1}^n b_k^{\mathbf{g}} t_{jk}^{\mathbf{g}} = \langle a^{\mathbf{g}}, T_{\mathbf{g}} b^{\mathbf{g}} \rangle$$

mit $\langle a^{\mathbf{g}}, b^{\mathbf{g}} \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j^{\mathbf{g}} b_j^{\mathbf{g}}$. *Durch* $R = \left[\; r_{jk} \; \right]_{j,k=1}^{n}$ *sei nun eine orthogonale Basistransformation gegeben, d.h.*

$$\mathbf{g}^k = \sum_{j=1}^{n} r_{jk} \mathbf{h}^j \,, \; k = 1, \ldots, n \,, \quad R^{-1} = R^T \,.$$

Es folgt

$$\mathbf{a} = \sum_{k=1} a_k^{\mathbf{g}} \mathbf{g}^k = \sum_{k=1}^{n} a_k^{\mathbf{g}} \sum_{j=1}^{n} r_{jk} \mathbf{h}^j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} r_{jk} a_k^{\mathbf{g}} \right) \mathbf{h}^j \,,$$

d.h. $a^{\mathbf{h}} = R a^{\mathbf{g}}$, *und*

$$T(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \langle a^{\mathbf{g}}, T_{\mathbf{g}} b^{\mathbf{g}} \rangle = \left\langle R^T a^{\mathbf{h}}, T_{\mathbf{g}} R^T b^{\mathbf{h}} \right\rangle = \left\langle a^{\mathbf{h}}, R T_{\mathbf{g}} R^T b^{\mathbf{h}} \right\rangle \,,$$

also

$$T_{\mathbf{h}} = R T_{\mathbf{g}} R^T \quad \text{bzw.} \quad t_{jk}^{\mathbf{h}} = \sum_{u=1}^{n} r_{ju} \sum_{v=1}^{n} t_{uv}^{\mathbf{g}} r_{kv} \,.$$

Die letzte Beziehung lässt sich unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention (die wir im weiteren auch verwenden) in der Form

$$t_{jk}^{\mathbf{h}} = r_{ju} r_{kv} t_{uv}^{\mathbf{g}} \tag{4.5}$$

schreiben.

Die Verallgemeinerung der Transformationsregel (4.5) auf Tensoren der Stufe m lautet

$$t_{j_1 j_2 \cdots j_m}^{\mathbf{h}} = r_{j_1 u_1} r_{j_2 u_2} \cdots r_{j_m u_m} t_{u_1 u_2 \cdots u_m}^{\mathbf{g}} \,.$$

Operationen mit Tensoren:

- **Summe** $T + S$ zweier Tensoren T und S m–ter Stufe:

$$(t+s)_{j_1 j_2 \cdots j_m}^{\mathbf{g}} = t_{j_1 j_2 \cdots j_m}^{\mathbf{g}} + s_{j_1 j_2 \cdots j_m}^{\mathbf{g}}$$

- **Direktes Produkt** $T \otimes S$ zweier Tensoren T m–ter und S k–ter Stufe:

$$(t \otimes s)_{j_1 j_2 \cdots j_{m+k}}^{\mathbf{g}} = t_{j_1 j_2 \cdots j_m}^{\mathbf{g}} s_{j_{m+1} j_{m+2} \cdots j_{m+k}}^{\mathbf{g}}$$

- Beispiel für die **Verjüngung** eines Tensors T :

$$t_{ijklm}^{\mathbf{g}} \mapsto \widetilde{t}_{ijm}^{\mathbf{g}} := t_{ijkkm}^{\mathbf{g}}$$

Beispiel 4.47 *Das Skalarprodukt zweier Vektoren* $\mathbf{a} = \left[\; a_k \; \right]_{k=1}^{n} \in \mathbb{R}^n$ *und* $\mathbf{b} = \left[\; b_k \; \right]_{k=1}^{n} \in \mathbb{R}^n$ *kann man auffassen als direktes Produkt der Tensoren* a_j *und* b_k *erster Stufe mit anschließender Verjüngung:*

$$a_j \otimes b_k = a_j b_k \mapsto a_j b_j = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$

Ebenso kann das Matrixprodukt $\left[\; t_{jk} \; \right]_{j,k=1}^{n} \left[\; a_k \; \right]_{k=1}^{n}$ *als direktes Produkt der Tensoren* t_{jk} *zweiter und* a_k *erster Stufe mit anschließender Verjüngung betrachtet werden:*

$$t_{jk} \otimes a_i = t_{jk} a_i \mapsto t_{jk} a_k$$

Es sei nun $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ versehen mit der kanonischen Basis $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$. Wir definieren den Tensor T_ε dritter Stufe über (vgl. Bsp. 4.45) $T_\varepsilon(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j, \mathbf{e}^k) = (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j, \mathbf{e}^k) =: \varepsilon_{ijk}$, d.h.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & : & (i\,j\,k) \text{ ist gerade Permutation von } (1\,2\,3)\,, \\ -1 & : & (i\,j\,k) \text{ ist ungerade Permutation von } (1\,2\,3)\,, \\ 0 & : & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

bzw.

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1\,,\ \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1\,,\ \varepsilon_{ijk} = 0 \text{ sonst.}$$

Es gilt

$$\varepsilon_{ijk} = \det \begin{bmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{bmatrix}, \tag{4.6}$$

was sich leicht aus den Rechenregeln für Determinanten bzw. aus der Formel für das Spatprodukt ergibt.

Beispiel 4.48 *Es seien* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ *und* $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. *Dann gilt* $c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$, *d.h. das Vektorprodukt ist eine zweifache Verjüngung des direkten Produktes der Tensoren* ε_{ijk} , a_l *und* b_m . *Für* $\mathbf{d} = \operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}$ *gilt also unter Verwendung der Abkürzung* $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$

$$d_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j a_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j}\,.$$

Beispiel 4.49 *Es seien* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. *Unter Verwendung des vorhergehenden Beispiels folgt für* $\mathbf{d} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

$$d_i = \varepsilon_{ijk} a_j (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_k = \varepsilon_{ijk} a_j (\varepsilon_{klm} b_l c_m) = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} a_j b_l c_m\,.$$

Nun ist

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk}$$

und wegen (4.6)

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmp} = \det \begin{bmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} \delta_{1l} & \delta_{1m} & \delta_{1p} \\ \delta_{2l} & \delta_{2m} & \delta_{2p} \\ \delta_{3l} & \delta_{3m} & \delta_{3p} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{ip} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jp} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kp} \end{bmatrix}$$

und somit (Verjüngung $p = k$*)*

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \sum_{k=1}^{3} \det \begin{bmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{ik} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jk} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kk} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{bmatrix} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}\,.$$

Es folgt $d_i = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m = a_m b_i c_m - a_j b_j c_i = b_i (a_m c_m) - c_i (a_j b_j)$, *d.h.*

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle\, \mathbf{b} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle\, \mathbf{c}\,.$$

Beispiel 4.50 *Wir wenden die im Beispiel 4.49 gewonnene Formel für $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}$ auf die Berechnung von $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ mit $\mathbf{a}, \mathbf{b} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ an. Die i–te Komponente ist also gleich*

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{klm}a_l b_m &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}\partial_j(a_l b_m) \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})(b_m\partial_j a_l + a_l\partial_j b_m) \\ &= \delta_{il}b_j\partial_j a_l - \delta_{jl}b_i\partial_j a_l + \delta_{jm}a_i\partial_j b_m - \delta_{im}a_j\partial_j b_m \\ &= b_j\partial_j a_i - b_i\partial_j a_j + a_i\partial_j b_j - a_j\partial_j b_i\,, \end{aligned}$$

so dass

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} + (\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}\,,$$

was auch in der Form

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{b} - \mathbf{b}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a} + \mathbf{a}'\mathbf{b} - \mathbf{b}'\mathbf{a}$$

geschrieben werden kann.

4.13 Übungsaufgaben

1. Geben Sie die Integrationsgrenzen bei Zurückführung von $\iint_B f(x,y)\,dxdy$ auf ein Doppelintegral an!
   (a) B ist das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$.
   (b) B wird begrenzt durch die Kurven $x = 0$, $y = 1$, $x = y^2$.
2. Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge und skizzieren Sie das Integrationsgebiet:
   (a) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dydx$ (b) $\int_{0}^{2}\int_{x}^{2x} f(x,y)\,dydx$ (c) **(HA)** $\int_{1}^{e}\int_{0}^{\ln x} f(x,y)\,dydx$
3. Berechnen Sie
   (a) $\iint_B (x^2+y)\,dxdy$, wobei B der beschränkte Bereich ist, der von den Parabeln $y = x^2$ und $x = y^2$ begrenzt wird,
   (b) **(HA)** $\iint \left(\frac{x}{y}\right)^2 dxdy$, wobei B von $y = x$, $x = 2$ und $xy = 1$ begrenzt wird,
   (c) $\iint_B x\,dxdy$, wobei $B = \left\{(x,y) : x^2 + (y-1)^2 \le 1,\ y \le -x+2\right\}$.
4. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der von den Ebenen $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$ und dem elliptischen Paraboloid $z = 2x^2 + y^2 + 1$ begrenzt wird.
5. Schreiben Sie das Integral $\int_0^2\int_0^x f(\sqrt{x^2+y^2})\,dydx$ in Polarkoordinaten um.

6. **(HA)** Leiten Sie die Formel für das Volumen einer Halbkugel her. (Hinweis: Transformation des Integrals auf Kugelkoordinaten)

   (**Z1**) Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt eines Dreiecks (mit konstanter Dichte) der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden ist.

   (**Z2**) Es seien I_x und $I_{x'}$ die Trägheitsmomente eines Körpers bezüglich zweier paralleler Achsen x und x', wobei die Achse x durch den Schwerpunkt des Körpers verläuft. Zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehung $I_{x'} = I_x + h^2 m$ (Steinerscher Satz), wobei m die Masse des Körpers und h den Abstand der beiden Achsen bezeichnen.

   (**Z3**) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx\,.$

7. **(HA)** Man berechne mit einem Raumintegral das Volumen des Körpers, der durch die Flächen $x^2 + y^2 = a^2$ und $x^2 + z^2 = a^2$ begrenzt wird.

8. Man berechne das Raumintegral $\displaystyle\iiint_B f(x, y, z) dxdydz$ für

   (a) $f(x, y, z) = xyz$, wobei $B \subset \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\big\}$ begrenzt wird von $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8$, $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$,

   (b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, wobei B begrenzt wird von der Fläche $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$ und der Ebene $z = c$ $(c > 0)$.

9. **(HA)** Man berechne das Volumen des Körpers, der von der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ aus dem Zylinder $x^2 + y^2 \leq \dfrac{R^2}{4}$ herausgeschnitten wird.

10. Man bestimme die Masse und die Lage des Schwerpunktes der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$, wenn die Dichte in den Punkten der Kugel dem Abstand dieser Punkte vom Koordinatenursprung umgekehrt proportional ist.

11. Ein Körper habe die Form eines Kegelstumpfes mit den Radien a, b, mit $a > b$ und der Höhe h. Berechne das Trägheitsmoment bzgl. seiner Symmetrieachse für die Dichte $\rho \equiv 1$.

12. Berechnen Sie die Masse des Körpers $B = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq a^2,\, 0 \leq z \leq h\big\}$, wenn die Dichte gleich $\rho(x, y, z) = e^{x^2+y^2}$ ist.

13. **(HA)** Berechnen Sie die Ladung eines Ellipsoids mit den Halbachsen a, b, c und der Ladungsdichte
$$\rho(x, y, z) = 1 - \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2}\,.$$

    (**Z**) Gegeben sei eine Flasche Bier, stehend auf einem Tischchen im fahrenden Zug. Wie hoch sollte die Bierfüllung sein, damit die Flasche möglichst stabil steht? (Die Form der Flasche sei als Hohlzylinder mit der Höhe h, dem Innenradius R_i und dem Außenradius R_a ohne Berücksichtigung des Bodens angenommen.)

14. Prüfen Sie, ob die folgenden Vektorfelder Potentialfelder in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sind, und bestimmen Sie ggf. das Potential:

    (a) $V_a(x) = \begin{bmatrix} e^{x_1}\sin x_1 & e^{x_1}\cos x_1 \end{bmatrix}^T$

    (b) $V_b(x) = 2\,e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$

    (c) **(HA)** $V_c(x) = \begin{bmatrix} 6\,x_1^2 & 2x_1^2 - x_3 & x_2 \end{bmatrix}^T$

    (d) **(HA)** $V_d(x) = \begin{bmatrix} x_2^2 + x_3^2 & 2\,x_1x_2 & 2\,x_1x_3 \end{bmatrix}^T$

15. Man verwende den Gaußschen Integralsatz (der Ebene) zur Berechnung von

    (a) $\displaystyle\iint_B \frac{x^4 - y^4}{x^2y^2}\,dx\,dy$, wobei B die Fläche ist, die von den Kurven $x^2+y^2 = 10$, $y = 3/x$ und $y = x$ begrenzt wird und die Eckpunkte $P_1(3,1)$, $P_2(\sqrt{5},\sqrt{5})$ und $P_3(\sqrt{3},\sqrt{3})$ hat,

    (b) $\displaystyle\oint_\Gamma (\cos x\ \sinh y - x\,y^2)\,dx + (\sin x\ \cosh y + x^2y)\,dy$, wobei Γ der Kreis $x^2+y^2 = a^2$ ist,

    (c) **(HA)** $\displaystyle\oint_\Gamma (x\,e^x + \sin y)\,dx + (\sin^2 y + x\ \cos y)\,dy$,
    wobei $\Gamma = \big\{(a\ \cos^3 t, a\ \sin^3 t) : 0 \le t \le 2\pi\big\}$ $(a > 0)$.

16. Man berechne die Oberfläche des Teils

    (a) des Zylinders $2\,z = x^2$, der von den Ebenen $y = x/2$, $y = 2\,x$ und $x = 2\sqrt{2}$ begrenzt wird,

    (b) **(HA)** der Fläche $z^2 = 2\,x\,y$ $(z \ge 0)$, der von den Ebenen $x = 0$, $x = a > 0$, und $y = 0$, $y = b > 0$ begrenzt wird,

    (c) des Paraboloids $2\,z = \dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b}$ $(a, b > 0)$, der vom Zylinder $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ herausgeschnitten wird.

17. Man berechne den Inhalt der folgenden Zonen auf einer Kugeloberfläche vom Radius R (β – geografische Breite, λ – geografische Länge):

    (a) $\beta_1 \le \beta \le \beta_2$, $-\pi \le \lambda \le \pi$ (b) $0 \le \beta \le \beta_0$, $0 \le \lambda \le \lambda_0$

18. Man zeige, dass für jede geschlossene, stückweise glatte Kurve $C \subset \mathbb{R}^2$ und jede stetige Funktion $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\oint_C f(x^2 + y^2)(x\,dx + y\,dy) = 0\,.$$

19. Man berechne (ohne und mit Verwendung des Gaußschen Integralsatzes) das Oberflächenintegral (zweiter Art) $\displaystyle\iint_S v(x)\,d\vec{S}$ für

(a) $v(x) = x$, $S = \left\{(x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = a,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\right\}$
$(a > 0$, $\left\langle \vec{n}, e^3 \right\rangle > 0)$,

(b) $v(x) = x$, $S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2\right\}$
(Normale $\vec{n}$ nach außen gerichtet),

(c) **(HA)** $v(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 - 1 \end{bmatrix}^T$, $S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ 0 \leq x_3 \leq 4\right\}$
$(\left\langle \vec{n}, e^3 \right\rangle > 0)$,

(**Z1**) $v(x) = \begin{bmatrix} x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{bmatrix}^T$, $S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2\right\}$
(Normale $\vec{n}$ nach außen gerichtet),

(d) $v(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_3 & -10 & x_2^2 \end{bmatrix}^T$, $S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 100,\ x_3 \geq 5\right\}$
$(\left\langle \vec{n}, e^3 \right\rangle > 0)$,

(**Z2**) $v(x) = x$, S - Oberfläche des Zylinders $\left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1,\ 0 \leq x_3 \leq h\right\}$ mit nach außen gerichteter Normale.

20. Man berechne für das Vektorfeld $v(x) = \begin{bmatrix} x_1 e^{x_2} & x_1 e^{x_3} & x_3 e^{x_1} \end{bmatrix}^T$ den Fluss durch die Fläche $S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_2^2 + x_3^2 = a^2,\ -1 \leq x_1 \leq 1\right\}$, wobei der Normalenvektor nach außen gerichtet sei.

21. **(HA)** Für das Vektorfeld $v(x) = \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 & x_3 \end{bmatrix}^T$ berechne man den Fluss durch eine Windung der Schraubenfläche $S = \left\{\begin{bmatrix} r\cos\varphi & r\sin\varphi & \frac{h}{2\pi}\varphi \end{bmatrix}^T : 0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\right\}$, wobei für den Normalenvektor $\overrightarrow{n} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{bmatrix}^T$ auf S die Ungleichung $\cos\gamma > 0$ gelte.

22. Man berechne $\oint v(x)\, d\vec{S}$ mit $v(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_2 x_3^2 \end{bmatrix}^T$, wobei S die Oberfläche eines achsenparallelen Würfels der Kantenlänge 2 mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung und nach außen gerichteter Normale ist.

23. Man zeige mit Hilfe des Stokesschen Integralsatzes, dass das Kurvenintegral
$$\int_\Gamma yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$
vom Weg unabhängig ist.

24. Man berechne $\oint_\Gamma x(z-y)dx + y(x-z)dy + z(y-x)dz$, wobei Γ das Dreieck mit den Eckpunkten $A(a,0,0)$, $B(0,a,0)$ und $C(0,0,a)$ (durchlaufen von A über B nach C und zurück nach A) ist,
    (a) unter Benutzung einer Parameterdarstellung von Γ ,
    (b) unter Verwendung des Stokeschen Integralsatzes.

25. (**Z**) Zeigen Sie, dass jedes bezüglich eines Punktes $x^0 \in \mathbb{R}^n$ zentralsymmetrische Vektorfeld der Gestalt $v(x) = f\left(\left\|x - x^0\right\|\right)(x - x^0)$ mit einer stetigen Funktion $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Potential in $\mathbb{R}^n \setminus \left\{x^0\right\}$ besitzt, und geben Sie dieses an.

Kapitel 5

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Dynamische Systeme

5.1 Einführung anhand von Beispielen

1. **Einfachstes Populationsmodell** (vgl. Abschnitt 0.5, Punkt 3)

$$P(t+\Delta t) - P(t) \approx k\,P(t)\,\Delta t\,, \quad k - \text{Geburtenrate.}$$

Für $\Delta t \longrightarrow 0$ ergibt sich das Anfangswertproblem (AWP)

$$P'(t) = k\,P(t)\,, \quad P(0) = P_0\,.$$

Die einzige Lösung dieses AWPs ist $P(t) = P_0 e^{k\,t}$, $t \in \mathbb{R}$.

2. **Population mit begrenzten Resourcen** (vgl. Abschnitt 0.13.4)

$$P'(t) = k[1-P(t)]P(t)\,,\ P(0) = P_0\,, \quad k > 0$$

Lösung:

$$P(t) = \begin{cases} \dfrac{P_0 e^{k\,t}}{1 - P_0 + P_0 e^{k\,t}} & , \quad 0 < P_0 < 1\,, \\[2ex] 1 & , \quad P_0 = 1\,, \\[2ex] \dfrac{P_0 e^{k\,t}}{1 - P_0 + P_0 e^{k\,t}} & , \quad 1 < P_0\,. \end{cases}$$

3. **Einfaches Räuber-Beute-Modell**

$x(t)$ - Beute-Population, $y(t)$ - Räuber-Population

Annahmen:

- $x(t)$ entwickelt sich exponentiell bei Abwesenheit von y.

- $y(t)$ stirbt exponentiell aus bei Abwesenheit von x.
- Die Zahl der von y gefressenen x ist proportional der möglichen Anzahl von Begegnungen $x\,y$.

Es ergibt sich folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \alpha\, x(t) - \beta\, x(t)y(t)\,, \\ \dot{y}(t) &= -\gamma\, y(t) + \delta\, x(t)y(t)\,. \end{aligned}$$

Dabei sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ positive Parameter.

4. **Räuber-Beute-Modell mit begrenzter Weidekapazität**

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \alpha \left[1 - \frac{x(t)}{W}\right] x(t) - \beta\, x(t)y(t)\,, \\ \dot{y}(t) &= -\gamma\, y(t) + \delta\, x(t)y(t) - \mu[y(t)]^2\,. \end{aligned}$$

Dabei sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta, W > 0$, $\mu \geq 0$. Im weiteren schreiben wir ein solches Differentialgleichungssystem kurz in der Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left[\alpha \left(1 - \frac{x}{W}\right) - \beta\, y\right] x\,, \\ \dot{y} &= [-\gamma + \delta\, x - \mu\, y]\, y\,. \end{aligned}$$

Ferner vereinbaren wir, dass, falls nichts anderes gesagt wird, auftretende Parameter (wie $\alpha, \beta, \ldots$) stets positiv sind.

5. **Ein Konkurrenzmodell**

- $x(t), y(t)$ - zwei Populationen mit gleicher Nahrungsquelle
- $N(t) = \gamma_1 x(t) + \delta_1 y(t)$ - benötigte Nahrungsmenge pro Zeiteinheit
- Ansatz:

$$\dot{x}(t) = \alpha \left(1 - \frac{N(t)}{A}\right) x(t)\,,$$
$$\dot{y}(t) = \beta \left(1 - \frac{N(t)}{B}\right) y(t)\,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [\alpha - \gamma(\gamma_1 x + \delta_1 y)]\, x\,, \\ \dot{y} &= [\beta - \delta(\gamma_1 x + \delta_1 y)]\, y\,, \end{aligned}$$

wobei $\gamma = \alpha/A$ und $\delta = \beta/B$.

6. **Epidemie-Modelle**

Eine Population unterteile sich in

- $x(t)$ - Suszeptible, d.h. Mitglieder, die gesund, aber ansteckbar sind,
- $y(t)$ - Infizierte,
- $z(t)$ - aus dem Ausbreitungsprozess der Krankheit ausgeschiedene Mitglieder (Immunisierte, Tote).

Annahmen:

- verschwindende Latenzzeit,
- Geburts- gleich Sterberate ($\Rightarrow$ konstante Populationsgröße),
- Suszeptible werden nur bei Kontakten mit Infizierten angesteckt.

(a) **Einfachstes Modell**:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha\, x\, y\,, \\ \dot{y} &= \alpha\, x\, y - \beta\, y\,, \\ \dot{z} &= \beta\, y\,, \end{aligned}$$

wobei $\alpha > 0$ - Ansteckungsrate, $\beta > 0$ - Beseitigungsrate. Es folgt $\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = 0$, d.h. $x + y + z = \mathrm{const}$. Offenbar genügt es, die ersten beiden Gleichungen zu betrachten

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha\, x\, y\,, \\ \dot{y} &= \alpha\, x\, y - \beta\, y\,. \end{aligned} \tag{5.1}$$

(b) **Modifiziertes Modell**:
Wir gehen jetzt von einer Geburtenrate $\mu > 0$ aus, die gleich der Sterberate ist, und betrachten β als Gesundungsrate = Immunisierungsrate:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha\, x\, y + \mu(x + y + z) - \mu\, x\,, \\ \dot{y} &= \alpha\, x\, y - \beta\, y - \mu\, y\,, \\ \dot{z} &= \beta\, y - \mu\, z\,. \end{aligned}$$

Es folgt wieder $\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = 0$, d.h. $x + y + z = N = \mathrm{const}$, und wir brauchen nur die ersten beiden Gleichungen zu betrachten:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha\, x\, y + \mu N - \mu\, x\,, \\ \dot{y} &= \alpha\, x\, y - \beta\, y - \mu\, y\,. \end{aligned} \tag{5.2}$$

(c) **Ein einfaches AIDS-Modell**:
- Die Sterberate $\mu + \mu_1$ Erkrankter ist größer als die Gesunder.
- Die Geburten werden reduziert um $\mu\, \alpha_1\, y$, da ein Anteil α_1 der Kinder von Infizierten bei der Geburt stirbt.
- Weiterhin ist eine vertikale Übertragung der Krankheit zu berücksichtigen. Die Rate der vertikalen Übertragung sei gleich q.

Es folgt

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -\alpha\, x\, y + \mu(N - \alpha_1 y - q\, y) - \mu\, x\,, \\
\dot{y} &= \alpha\, x\, y - \beta\, y - (\mu + \mu_1) y + \mu\, q\, y\,.
\end{aligned}
$$

Anfangswertprobleme: Bei allen Beispielen sucht man i.a. Lösungen, die zu einem gegebenen Anfangszustand $x_0 = x(0)\,,\; y_0 = y(0)\,,\; \ldots$ gehören.

5.2 Beispiele für die Lösung gewisser Typen gewöhnlicher Differentialgleichungen

1. $x' = f(t)$
2. $x' = f(x)$ (Bsp. $x' = \cos^2 x$)
3. $x' = f(x)g(t)$ (Bsp. $x' + t\,x^2 = 0$, Spezialfall $x' = g(t)x$)
4. $x' = g(t)x + f(t)$ (Bsp. $x' = 2\,t\,x + (2t-1)e^t$ mit Variation der Konstanten)
5. $x'' = f(x)$ (Bsp. $x'' = -x$)
6. Wir betrachten das AWP $x(0) = x_0 > 0\,,\; y(0) = y_0 > 0$ zum Differentialgleichungssystem (5.1), Abschnitt 5.1. Division der zweiten Gleichung durch die erste ergibt

$$y'(x) = \frac{\beta}{\alpha\, x} - 1\,,$$

d.h. eine gewöhnliche Differentialgleichung vom Typ 1. Wir erhalten

$$y(x) = \frac{\beta}{\alpha} \ln x - x + C\,,$$

d.h.

$$y(x) = y_0 + x_0 + \frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{x}{x_0} - x\,.$$

Diskussion:

$$
\begin{gathered}
y'(x) = \frac{\beta}{\alpha\, x} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = x^* = \frac{\beta}{\alpha}\,, \\
y''(x^*) = -\frac{\beta}{\alpha\, (x^*)^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{lok. Max.,} \\
\lim_{x \to +0} y(x) = -\infty = \lim_{x \to +\infty} y(x)
\end{gathered}
$$

Folgerungen:

- $x_0 \le \beta/\alpha \Rightarrow$ sofortiges Abklingen der Epidemie.
- $x_0 > \beta/\alpha \Rightarrow$ Ausbreitung der Epidemie bis $x = x^* = \beta/\alpha$, dann Abklingen.
- Ein Teil der Population $x_1 > 0$ wird nicht von der Krankheit befallen.

5.3 Der Begriff des dynamischen Systems

Definition 5.1 *Unter einem* **dynamischen System** *auf einem Gebiet* $M \subset \mathbb{R}^n$ *verstehen wir eine stetige Abbildung* $\Phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ *, welche den folgenden Axiomen genügt:*

(1) $\Phi(0, x) = x$ *für alle* $x \in M$ *,*

(2) $\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + t, x)$ *für alle* $t, s \in \mathbb{R}$ *und alle* $x \in M$ *.*

Φ *nennt man auch* **Fluss** *auf* M *.* M *heißt* **Phasenraum***,* $\mathbb{R} \times M$ **erweiterter Phasenraum***. Unter der* **Flusslinie** *oder* **Trajektorie** *eines Punktes* $x \in M$ *versteht man die Abbildung* $\alpha_x : \mathbb{R} \longrightarrow M$ *mit* $\alpha_x(t) = \Phi(t, x)$ *. Das Bild* $\alpha_x(\mathbb{R}) = \{\alpha_x(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *heißt* **Bahn** *oder* **Orbit** *des Punktes* x *.*

Definition 5.2 *(a) Ein Punkt* $x \in M$ *heißt* **stationärer Punkt***,* **Fixpunkt** *oder* **Gleichgewichtspunkt** *des Flusses* Φ *, wenn* $\alpha_x : \mathbb{R} \longrightarrow M$ *konstant ist.*
(b) Ein Punkt $x \in M$ *heißt* **periodischer Punkt** *des Flusses* Φ *, wenn ein kleinstes* $p_0 > 0$ *existiert, so dass* $\Phi(t + p_0, x) = \Phi(t, x)$ *für ein* $t \in \mathbb{R}$ *gilt. (Aus dem zweiten Flussaxiom folgt, dass diese Beziehung dann für alle* $t \in \mathbb{R}$ *gilt.)*

Lemma 5.3 *Außer konstanten, periodischen und injektiven Flusslinien gibt es keine anderen Typen von Flusslinien.*

Definition 5.4 *Unter dem* **Geschwindigkeitsfeld** $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *eines differenzierbaren Flusses* $\Phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ *versteht man das Vektorfeld*

$$v(x) = \frac{\partial \Phi(0, x)}{\partial t} = \dot{\alpha}_x(0) \,.$$

Im Fall eines differenzierbaren Flusses sind die Flusslinien $\alpha_x : \mathbb{R} \longrightarrow M$ Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\dot{\alpha}_x = v(\alpha_x) \,,$$

welches wir im weiteren in der Form

$$\dot{x} = v(x)$$

schreiben.

5.4 Autonome Differentialgleichungssysteme

Sei jetzt $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein beliebiges Vektorfeld. Dann nennt man

$$\dot{x} = v(x) \tag{5.3}$$

bzw. ausführlich geschrieben

$$\dot{x}_j = v_j(x_1, \ldots, x_n) \,, \quad j = 1, \ldots, n \,,$$

ein **autonomes Differentialgleichungssystem**. Unter einer **Lösung** von (5.3) versteht man einen differenzierbaren Weg $\gamma : (a,b) \longrightarrow M$, so dass $\dot{\gamma}(t) = v(\gamma(t))$, $t \in (a,b)$, gilt. Der Graph von γ heißt **Lösungs-** oder **Integralkurve** von (5.3). Die Lösungskurve heißt **maximal**, wenn das Definitionsintervall (a,b) nicht zu einem größeren Intervall erweitert werden kann. ($a = -\infty$ und $b = +\infty$ sind zugelassen.)

Beispiel 5.5 $n = 1$, $\dot{x} = 1 + x^2$

Beispiel 5.6 $n = 2$, $v_1(x_1, x_2) = 1$, $v_2(x_1, x_2) = -(\operatorname{sgn} x_2)\sqrt{|x_2|}$

Theorem 5.7 *Ist das Vektorfeld $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so existiert für jedes $x^0 \in M$ genau eine maximale Integralkurve mit dem Weg $\alpha_{x^0} : (a_{x^0}, b_{x^0}) \longrightarrow M$, so dass $\alpha_{x^0}(0) = x^0$ erfüllt ist. Alle Integralkurven definieren über die Formel $\Phi(t,x) := \alpha_x(t)$ einen* **lokalen Fluss** *mit dem Geschwindigkeitsfeld v .*

Das Definitionsgebiet dieses lokalen Flusses ist $A = \bigcup_{x \in M} (a_x, b_x) \times \{x\}$, und $\Phi : A \longrightarrow M$ genügt folgenden Axiomen:

(1) $\Phi(0,x) = x$ für alle $x \in M$,

(2) $\Phi(s, \Phi(t,x)) = \Phi(s+t, x)$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$ und alle $x \in M$, für die die linke Seite dieser Gleichung erklärt ist.

Theorem 5.7 ist auch auf andere Situationen anwendbar:

I. Autonome Differentialgleichungen n-ter Ordnung

$$x^{(n)} = f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n-1)})$$

Beispiel 5.8 $\ddot{x} = -x$

Beispiel 5.9 $m\ddot{x} = -k\,x - r\,\dot{x}$

II. Nichtautonome Differentialgleichungen n-ter Ordnung

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n-1)})$$

Definition 5.10 **Phasenportrait** *des autonomen Differentialgleichungssystems*

$$\dot{x} = v(x)\,, \quad v : M \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n\,,$$

wird der durch v definierte lokale Fluss genannt. Dabei wird der lokale Fluss weniger als Abbildung, sondern mehr als Gesamtheit der Bahnkurven aufgefasst. Daher wird das Vektorfeld $v(x)$ selbst gelegentlich als das Phasenportrait angesehen. **Erweitertes Phasenportrait** *des nichtautonomen Differentialgleichungssystems*

$$\dot{x} = v(t,x)\,, \quad v : M \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n\,,$$

nennt man das Vektorfeld $\begin{bmatrix} 1 & v_1 & \ldots & v_n \end{bmatrix}^T$.

5.5 Aus dem Leben der Integralkurven

Es sei $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $M \subset \mathbb{R}^n$, ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Für jedes $x^0 \in M$ sei $\alpha_{x^0} : (a_{x^0}, b_{x^0}) \longrightarrow M$ die maximale Lösung des AWPs

$$\dot{x} = v(x), \quad x(0) = x^0 .$$

Es gilt $a_x < 0 < b_x$ für alle $x \in M$. Man nennt a_x das **untere** und b_x das **obere Alter** sowie $b_x - a_x$ die **Lebensdauer** des Punktes $x \in M$. Ist $b_x < \infty$, so heißt $b_x - t$ die **verbleibende Lebensdauer** des Punktes $\alpha_x(t)$.

Lemma 5.11 *Für jeden Punkt $x^0 \in M$ existieren eine Umgebung $U(x^0)$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass $b_x \geq \varepsilon$ (analog $a_x \leq -\varepsilon$) für alle $x \in U(x^0)$ gilt. D.h., alle Punkte $x \in U(x^0)$ haben ein gemeinsames Lebensintervall.*

Satz 5.12 *Sei $X \subset M$ kompakt. Dann haben alle $x \in X$ ein gemeinsames Lebensintervall.*

Folgerung 5.13 *Eine Flusslinie endlichen oberen Alters verlässt für immer jede kompakte Menge $X \subset M$, d.h. ihre letzten Sekunden verbringt sie außerhalb von X . Analog verbringt jede Flusslinie endlichen unteren Alters die ersten Sekunden ihres Lebens außerhalb von X .*

Definition 5.14 *Ein stetig differenzierbares Vektorfeld $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt* **global integrierbar***, wenn alle Lösungen des AWPs $\dot{x} = v(x)$, $x(0) = x^0 \in M$, auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind, d.h. wenn $a_x = -\infty$ und $b_x = +\infty$ für alle $x \in M$ gilt.*

Theorem 5.15 *Es sei $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Ferner mögen ein $\tau_0 > 0$ und ein $r_0 > 0$ existieren, so dass*

$$|v(x)| \leq \frac{|x|}{\tau_0} \quad \textit{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \textit{mit} \quad |x| \geq r_0$$

gilt. Dann ist v global integrierbar.

5.6 Erste Integrale

Definition 5.16 *Es sei $v : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein gegebenes Vektorfeld. Unter einem* **ersten Integral** *für v (oder für das autonome System $\dot{x} = v(x)$) versteht man eine stetig differenzierbare Funktion $F : M \longrightarrow \mathbb{R}$, die längs der Bahnkurven von v konstant ist.*

Die Ableitung von $F(x)$ in Richtung des Vektorfeldes v muss also Null sein, d.h.

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 .$$

Der Gradient von F steht also senkrecht auf v . Die Bahnkurven verlaufen somit innerhalb der Niveauflächen $\{x \in M : F(x) = \text{const}\}$, so dass man auf diese Weise die Dimension des Problems reduzieren kann.

Beispiel 5.17

$$\ddot{\theta} + \sin\theta = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -\sin x_1 \end{array}$$

5.7 Lineare Dgln. mit konstanten Koeffizienten

Die **allgemeine Lösung** der Differentialgleichung

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = f(t)\,, \quad a_i \in \mathbb{R}\,, \tag{5.4}$$

lässt sich stets in der Form $x_h(t) + x_s(t)$ schreiben, wobei $x_h(t) = x_h(t; c_1, \ldots, c_n)$ die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = 0 \tag{5.5}$$

ist, die von den n frei wählbaren Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ abhängt, und $x_s(t)$ ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (5.4).

(a) Struktur von $x_h(t)$: Es sei $p(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_r)^{m_r}$ das sogenannte **charakteristische Polynom** der homogenen Differentialgleichung (5.5), wobei die λ_j paarweise verschieden sind. Wir suchen n linear unabhängige Lösungen $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ der homogenen Differentialgleichung (5.5). Die allgemeine Lösung von (5.5) kann dann in der Form

$$x_h(t) = c_1\varphi_1(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t)\,, \quad c_i \in \mathbb{R}\,,$$

geschrieben werden. Ein solches System $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ findet man wie folgt:

- Ist λ_j reell, so nehmen wir zu diesem System die Funktionen

  $$t^{k-1}e^{\lambda_j t}\,, \quad k = 1, \ldots, m_j\,,$$

  hinzu.

- Ist $\lambda_j = \alpha_j + \mathbf{i}\beta_j$, $\beta_j \neq 0$, komplex, so existiert ein $\lambda_i = \overline{\lambda_j}$, und wir nehmen zum System die Funktionen

  $$t^{k-1}e^{\alpha_j t}\cos\beta_j t\,,\ t^{k-1}e^{\alpha_j t}\sin\beta_j t\,, \quad k = 1, \ldots, m_j\,,$$

  hinzu.

(b) Methoden zur Bestimmung einer speziellen Lösung $x_s(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung (5.4):

(b_1) Lösungsansätze

(b_2) Variation der Konstanten

(c) Die Laplace-Transformation zur Lösung des Anfangswertproblems

$$x(0) = x_0\,,\ x'(0) = x_1\,,\ \ldots\,,\ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}$$

für die Differentialgleichung (5.4).

5.8 Lineare Systeme gewöhnlicher Dgln. (Grundlagen)

1. Es seien $a_{jk} : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen und $A(t) = \left[\ a_{jk}(t)\ \right]_{j,k=1}^{n}$, $t \in (a,b)$. Wir betrachten das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{x} = A(t)x \tag{5.6}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x(t_0) = x^0 \in \mathbb{R}^n\,, \tag{5.7}$$

wobei $t_0 \in (a,b)$ fest gewählt sei. Unter den gemachten Voraussetzungen existiert genau eine Lösung $\varphi_{x^0}(t)$, $t \in (a,b)$, des AWPs (5.6), (5.7) (vgl. Theorem 5.7). Mit $\mathbf{C}^{(1)}_{\mathbb{R}^n}(a,b)$ bezeichnen wir den linearen Raum der auf (a,b) definierten und stetig differenzierbaren Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^n$ und mit $\mathcal{L}$ die Menge aller Lösungen von (5.6), d.h.

$$\mathcal{L} = \left\{ \varphi \in \mathbf{C}^{(1)}_{\mathbb{R}^n}(a,b) : \dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t),\ t \in (a,b) \right\}.$$

Die **Anfangswertabbildung** $a_{t_0} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $a_{t_0}(\varphi) = \varphi(t_0)$ ist nach dem Existenz- und Eindeutigkeitstheorem bijektiv, so dass $a_{t_0} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein linearer Isomorphismus ist. Daraus folgt $\dim \mathcal{L} = n$. Eine Basis $\left\{\Phi^1, \ldots, \Phi^n\right\}$ von $\mathcal{L}$ heißt **Fundamentalsystem** von Lösungen des Systems (5.6). Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitstheorem ist das lineare Gleichungssystem

$$c_1\Phi^1(t_0) + \cdots + c_n\Phi^n(t_0) = x^0\,,$$

d.h.

$$\begin{bmatrix} \Phi^1_1(t_0) & \cdots & \Phi^n_1(t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi^1_n(t_0) & \cdots & \Phi^n_n(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^0_1 \\ \vdots \\ x^0_n \end{bmatrix},$$

für jedes $x^0 \in \mathbb{R}^n$ und jedes $t_0 \in (a,b)$ eindeutig lösbar. Also gilt $\det \Phi(t_0) \neq 0$, wobei $\Phi(t) = \left[\Phi^k_j(t)\right]_{j,k=1}^{n}$. Sind umgekehrt $\det \Phi(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in (a,b)$ und $\varphi(t)$ eine beliebige Lösung von (5.6), so folgt $\varphi(t) = \Phi(t)c$ mit $c = [\Phi(t_0)]^{-1}\varphi(t_0)$.

Folgerung 5.18 *Sind $\Phi^1, \ldots, \Phi^n$ Lösungen von (5.6), so ist $\left\{\Phi^1, \ldots, \Phi^n\right\}$ genau dann ein Fundamentalsystem von (5.6), wenn ein $t_0 \in (a,b)$ mit $\det \Phi(t_0) \neq 0$ existiert. (In diesem Fall ist dann $\det \Phi(t) \neq 0$ für alle $t \in (a,b)$.)*

2. Wir betrachten die Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0 \tag{5.8}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $a_j : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Eine Funktion $\varphi(t)$, $t \in (a,b)$, ist genau dann Lösung von (5.8), wenn $\widetilde{\varphi}(t) = [\varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)]^T$ Lösung von

$$\dot{\widetilde{x}} = A(t)\widetilde{x}$$

ist, wobei

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_n(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{bmatrix}.$$

Nach obiger Folgerung ist ein System $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ von Lösungen $\varphi_j : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ von (5.8) genau dann ein Fundamentalsystem von (5.8), wenn ein $t_0 \in (a,b)$ existiert, so dass

$$\det \begin{bmatrix} \varphi_1(t_0) & \cdots & \varphi_n(t_0) \\ \dot{\varphi}_1(t_0) & \cdots & \dot{\varphi}_n(t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} \neq 0 \qquad (\textbf{Wronski} - \textbf{Determinante})$$

gilt.

3. Nun betrachten wir das inhomogene System

$$\dot{x} = A(t)x + y(t) \tag{5.9}$$

mit $A(t)$ wie in (5.6) und gegebenem $y \in \mathbf{C}^{(1)}_{\mathbb{R}^n}(a,b)$. Das AWP (5.9), (5.7) ist eindeutig lösbar. Es seien $\left\{\Phi^1, \ldots, \Phi^n\right\}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von (5.6) und $\varphi^0(t)$ eine Lösung von (5.9). Dann ist $\varphi(t) = \Phi(t)c + \varphi^0(t)$ Lösung von (5.9) für jedes $c \in \mathbb{R}^n$. Aus (5.7) folgt dann $c = [\Phi(t_0)]^{-1}\left[x^0 - \varphi^0(t_0)\right]$.

4. Die Methode der Variation der Konstanten: Wir suchen eine Lösung von (5.9), (5.7) bei gegebenem Fundamentalsystem $\left\{\Phi^1, \ldots, \Phi^n\right\}$ von (5.6) und machen dazu den Lösungsansatz

$$\varphi(t) = \Phi(t)c(t)\,.$$

Es folgt

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\Phi}(t)c(t) + \Phi(t)\dot{c}(t) = A(t)\Phi(t)c(t) + \Phi(t)\dot{c}(t)\,.$$

Aus (5.9) folgt $\Phi(t)\dot{c}(t) = y(t)$, also

$$\varphi(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} [\Phi(\tau)]^{-1}\, y(\tau)\, d\tau + \Phi(t)\,[\Phi(t_0)]^{-1}\, x^0\,.$$

5.9 Lineare Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir erinnern an einige Fakten aus der Linearen Algebra, die Jordansche Normalform und die matrixwertige Exponentialfunktion betreffend:

(a) (Jordansche Normalform) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ habe die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ und $\lambda_j = \alpha_j + \mathbf{i}\beta_j$, $\overline{\lambda_j} = \alpha_j - \mathbf{i}\beta_j$, $j = k+1, \ldots, k+m$, mit $k + 2m = n$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$ und $\beta_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann existiert eine Basis $\left\{u^1, \ldots, u^k, v^{k+1}, u^{k+1}, \ldots, v^{k+m}, u^{k+m}\right\}$ des Raumes $\mathbb{R}^n$, wobei die Vektoren u^j , $j = 1, \ldots, k$, und $w^{k+j} = u^{k+j} + \mathbf{i}v^{k+j}$, $j = 1, \ldots, m$, verallgemeinerte Eigenvektoren der Matrix A sind, so dass für die (invertierbare) Matrix $P = \left[u^1 \cdots u^k \, v^{k+1} \, u^{k+1} \cdots v^{k+m} \, u^{k+m}\right]$ die Beziehung

$$P^{-1}A\,P = \begin{bmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_r \end{bmatrix}$$

mit den Jordan-Blöcken B_j der Gestalt

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$

im Fall eines reellen Eigenwertes $\lambda = \lambda_j$, $j = 1, \ldots, k$, oder der Gestalt

$$\begin{bmatrix} D & I_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & D \end{bmatrix}$$

mit $D = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ und $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ im Fall eines komplexen Eigenwertes $\lambda = \alpha + \mathbf{i}\beta = \alpha_j + \mathbf{i}\beta_j$, $j = 1, \ldots, m$, gilt.

(b) Es gilt auch: Sind u^j , $j = 1, \ldots, k$, und $w^{k+j} = u^{k+j} + \mathbf{i}v^{k+j}$, $j = 1, \ldots, m$, Hauptvektoren, so dass das System $\left\{u^1, \ldots, u^k, v^{k+1}, u^{k+1}, \ldots, v^{k+m}, u^{k+m}\right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist, so ist $A = S + N$, wobei

$$P^{-1}SP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & D_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & D_m \end{bmatrix}, \quad D_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{bmatrix},$$

gilt, die Matrix $N = A - S$ nilpotent von der Ordnung $r \leq n$ (d.h., es gilt $N^r = \Theta$) und mit der Matrix S vertauschbar (d.h., es gilt $S\,N = N\,S$) ist.

(c) (Matrixwertige Exponentialfunktion) Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definieren wir

$$\exp(t\,A) = e^{t\,A} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\,A^k = I + t\,A + \frac{1}{2}\,t^2A^2 + \frac{1}{6}\,t^3A^3 + \cdots .$$

Dabei gilt

$$e^{A+B} = e^A e^B\,, \quad \text{falls} \quad A\,B = B\,A\,, \tag{5.10}$$

und

$$\frac{d}{dt}\,e^{tA} = A\,e^{tA} = e^{tA}A\,. \tag{5.11}$$

Folgerung 5.19

1. $\varphi(t) = e^{tA}x^0$ *ist Lösung des AWPs*

$$\dot{x} = A\,x\,, \quad x(0) = x^0\,.$$

2. e^{tA}

$$= e^{t(S+N)} = e^{tS}e^{tN} = Pe^{tP^{-1}SP}P^{-1}\left(I + t\,N + \cdots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\,N^{r-1}\right)$$

$$= P\,\mathrm{diag}\left[e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_k t}, e^{tD_1}, \ldots, e^{tD_m}\right] P^{-1}\left(I + t\,N + \cdots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\,N^{r-1}\right)$$

3. $D = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \mathbf{i} & -\mathbf{i} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha+\mathbf{i}\beta & 0 \\ 0 & \alpha-\mathbf{i}\beta \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -\mathbf{i} & 1 \\ \mathbf{i} & 1 \end{bmatrix} =: T^{-1}[\ldots]T$

$$\Longrightarrow e^{tD} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \mathbf{i} & -\mathbf{i} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{(\alpha+\mathbf{i}\beta)t} & 0 \\ 0 & e^{(\alpha-\mathbf{i}\beta)t} \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -\mathbf{i} & 1 \\ \mathbf{i} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\alpha t}\cos(\beta t) & -e^{\alpha t}\sin(\beta t) \\ e^{\alpha t}\sin(\beta t) & e^{\alpha t}\cos(\beta t) \end{bmatrix}$$

Beispiel 5.20 $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Beispiel 5.21 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Folgerung 5.22 *Es gilt*

$$\lim_{t\to\pm\infty} \varphi_{x^0}(t) = \lim_{t\to\pm\infty} \Phi(t, x^0) = \Theta \quad \forall\, x^0 \in \mathbb{R}^n$$

genau dann, wenn die Realteile aller Eigenwerte von A negativ (positiv) sind.

Folgerung 5.23 *Ist* $\lambda \in \mathbb{R}$ *n-fache Nullstelle von* $p_A(\lambda)$, *so können wir in* (b) $u^j = e^j$, $j = 1, \ldots, n$, *wählen und erhalten*

$$A = \lambda I + N$$

mit einer nilpotenten Matrix N.

Beispiel 5.24 *Wir wenden Folg. 5.23 auf die Matrix A des Bsp. 5.21 an.*

Beispiel 5.25 $$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Folgerung 5.26 (inhomogene Systeme) *Für*

$$\dot{x} = A\,x + f(t)\,, \quad x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^n\,, \tag{5.12}$$

machen wir den Ansatz $\psi(t) = e^{tA}c(t)$ *und erhalten*

$$\dot{\psi}(t) = A\,e^{tA}c(t) + e^{tA}\dot{c}(t)\,.$$

Für $x(t) = \psi(t)$ *ergibt sich dann aus der Differentialgleichung in* (5.12)

$$\begin{aligned} e^{tA}\dot{c}(t) &= f(t)\,, \\ \dot{c}(t) &= e^{-tA}f(t)\,, \\ c(t) &= \int_0^t e^{-\tau A}f(\tau)\,d\tau + c^0\,. \end{aligned}$$

Die Lösung des AWPs (5.12) *hat also die Gestalt*

$$\varphi_{x^0}(t) = e^{tA}\left(x^0 + \int_0^t e^{-\tau A}f(\tau)\,d\tau\right)\,. \tag{5.13}$$

Zusammenfassung: Zu einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, einer gegebenen Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ und einem gegebenen Vektor $x^0 \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir das AWP (5.12). Wir definieren $\Phi(t,x) = e^{tA}x$, $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Dann gilt

(i) $\Phi(0,x) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$,

(ii) $\Phi(t,\Phi(s,x)) = e^{tA}e^{sA}x = e^{(t+s)A}x = \Phi(t+s,x) \quad \forall\, t,s \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$, d.h. $\Phi(t,x)$ ist Fluss auf $\mathbb{R}^n$,

(iii) $\varphi_{x^0}(t) = \Phi(t,x^0)$ ist Lösung von (5.12) für $f \equiv 0$, d.h.

$$\dot{\varphi}_{x^0}(t) = A\,\varphi_{x^0}(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

Die Lösung von (5.12) ist eindeutig und gegeben durch (5.13).

Der Fall $n = 2$: Wir betrachten für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\dot{x} = A\,x\,. \tag{5.14}$$

Setzen wir $\det A \neq 0$ voraus, so ist Θ der einzige stationäre Punkt zu (5.14). Wir wollen uns jetzt einen Überblick über mögliche Phasenportraits in der Umgebung dieses Punktes verschaffen. Es genügt, die verschiedenen möglichen (reellen) Jordanschen Normalformen von A zu betrachten:

1. $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \Longrightarrow \Phi(t,x) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} x_1 \\ e^{\mu t} x_2 \end{bmatrix}$
   (a) $\lambda < 0 < \mu \Longrightarrow \Theta$ ist **Sattelpunkt**.
   (b) $\lambda \leq \mu < 0 \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \Phi(t,x) = \Theta \Longrightarrow \Theta$ ist **stabiler Knoten**.
   (c) $0 < \lambda \leq \mu \Longrightarrow \lim_{t\to -\infty} \Phi(t,x) = \Theta \Longrightarrow \Theta$ ist **instabiler Knoten**.

2. $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \Longrightarrow \Phi(t,x) = \begin{bmatrix} x_1 + t\,x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} e^{\lambda t}$
   (a) $\lambda < 0 \Longrightarrow \Theta$ ist **stabiler Knoten**.
   (b) $\lambda > 0 \Longrightarrow \Theta$ ist **instabiler Knoten**.

3. $A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$
   $\Longrightarrow \Phi(t,x) = \begin{bmatrix} x_1 \cos\beta t - x_2 \sin\beta t \\ x_1 \sin\beta t + x_2 \cos\beta t \end{bmatrix} e^{\alpha t} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \begin{bmatrix} \cos(\beta t + \theta) \\ \sin(\beta t + \theta) \end{bmatrix} e^{\alpha t}$, wobei $\cos\theta = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$, $0 \leq \theta < \pi$.
   (a) $\alpha = 0 \Longrightarrow$ Die Orbits sind Kreise. Θ heisst **Zentrum**.
   (b) $\alpha < 0 \Longrightarrow \Theta$ ist **stabiler Focus**.
   (c) $\alpha > 0 \Longrightarrow \Theta$ ist **instabiler Focus**.

Zusammenfassung: Seien $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\delta = \det\, A$ und $\tau = \operatorname{trace} A = a_{11} + a_{22}$. Dann ist das charakteristische Polynom von A gegeben durch

$$p_A(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - \tau\,\lambda + \delta\,.$$

Somit sind $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta}\right)$ die Eigenwerte von A, und es gilt:

(a) Ist $\delta < 0$ ($\Rightarrow \lambda_1 > 0\,,\ \lambda_2 < 0$), so ist Θ ein Sattelpunkt.

(b) Sind $\delta > 0$ und $\tau^2 - 4\delta \geq 0$ ($\Rightarrow \lambda_{1,2}$ sind reell und haben gleiches Vorzeichen), so ist Θ ein Knoten, und zwar ein stabiler für $\tau < 0$, ein instabiler für $\tau > 0$.

(c) Sind $\delta > 0$, $\tau^2 - 4\delta < 0$ und $\tau \neq 0$ ($\Rightarrow \lambda_1 = \overline{\lambda_2}$, $\mathsf{Re}\,\lambda_{1,2} \neq 0$, $\mathsf{Im}\,\lambda_{1,2} \neq 0$), dann ist Θ ein stabiler ($\tau < 0$) bzw. instabiler ($\tau > 0$) Focus.

(d) Sind $\delta > 0$ und $\tau = 0$ ($\Rightarrow \lambda_1 = \overline{\lambda_2} \neq 0$, $\mathsf{Re}\,\lambda_{1,2} = 0$), so ist Θ ein Zentrum.

Ist $\delta = 0$, so nennt man Θ einen **entarteten Gleichgewichtspunkt**. In diesem Fall ist Θ **kein** isolierter Gleichgewichtspunkt.

Beispiel 5.27 $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *wie in Bsp. 5.20. Wir haben* $\lambda_{1,2} = \pm 2\mathbf{i}$. *Die Lösung des entsprechenden AWPs lautet*

$$\varphi_{x^0}(t) = \begin{bmatrix} x_1^0 \cos 2t - 2x_2^0 \sin 2t \\ \dfrac{1}{2} x_1^0 \sin 2t + x_2^0 \cos 2t \end{bmatrix}.$$

Es folgt

$$[\varphi_1(t)]^2 + 4[\varphi_2(t)]^2 = (x_1^0)^2 + 4(x_2^0)^2 = \text{const},$$

d.h. die Lösungskurven sind Ellipsen.

5.10 Übungsaufgaben

1. In welcher Zeit kühlt sich ein Körper, der auf 100^oC erhitzt wurde, in einem Raum mit der Temperatur von 20^oC bis auf 25^oC ab, wenn er sich in 10 Minuten bis auf 60^oC abkühlt? (Hinweis: Die Geschwindigkeit der Abkühlung ist proportional zur Temperaturdifferenz.)

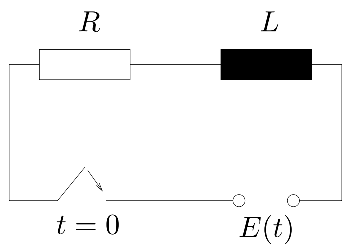
2. **(HA)** Alamagunther Tropfloch holt eine Flasche Bier aus seinem 7^oC–Kühlschrank, in dem sie schon seit zwei Tagen steht. Er hat sie noch nicht geöffnet, da stürzt sein derangierter Bruder Almansor ins Haus und verstrickt ihn ganze 90 Minuten lang in eine hitzige Diskussion über die Zukunft des Ackerbaus am Nordpol. All das spielt sich in dem Wohnzimmer ab, das der energiebewußte Almagunther auf der patriotischen Temperatur von 19^oC hält. Dem Hausherrn schwant, dass sein vereinsamtes Bier für Christenmenschen zu warm werden wird. Kaum hat Almansor die Haustür zugeschlagen, mißt Almagunther die Temperatur des Gerstensaftes und stellt eine betrübliche Überhitzung desselben auf 15^oC fest. Da er, wie jeder passionierte Biertrinker, das Newtonsche Abkühlungsgesetz kennt, schließt er daraus, dass er Bier mit Zimmertemperatur (19^oC) etwa 3 Stunden lang in seinen Kühlschrank stellen muß, um es auf annehmbare 8^oC zu bringen. Hat er recht?

3. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung eines Massepunktes, der mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 von der Erdoberfläche senkrecht nach oben geschossen wird! Nach welcher Zeit erreicht er seine höchste Lage? Wie hoch befindet er sich in diesem Moment?

4. Am Boden eines zylindrischen Gefäßes, welches bis zur Höhe H_0 mit Wasser gefüllt ist, befindet sich eine kleine Öffnung der Fläche q, die vom Zeitpunkt $t = 0$ an proportional zur Zeit geöffnet wird. Wie hoch steht die Flüssigkeit im Zylinder zum Zeitpunkt $t = T$,

wenn hier die Öffnung erstmalig vollständig offen ist? (Hinweis: Die Ausflußgeschwindigkeit von Wasser aus einer kleinen Öffnung, die sich in der Tiefe h unterhalb der freien Wasseroberfläche befindet ist gleich $\sqrt{2gh}$ mit der Erdbeschleunigung g.)

5. Die Stromstärke J in einem Stromkreis mit dem Ohmschen Widerstand R, der Selbstinduktion L und der elektromotorischen Kraft E genügt der Differentialgleichung



$$L\frac{dJ}{dt} + RJ = E(t)$$

(R und L konstant). Berechnen Sie $J(t)$, wenn zur Zeit $t = 0$ der Stromkreis geschlossen wird!

   (a) $E(t) = E_0$,
   (b) $E(t) = kt$,
   (c) $E(t)$ beliebig.

6. Bestimmen Sie das Zerfallsgesetz von Radium, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ die Masse m_0 vorhanden ist. (Die Halbwertzeit von Radium beträgt 1600 Jahre. Die Zerfallsrate ist proportional zur vorhandenen Menge.)

   Zusatz: Wie ändert sich das Zerfallsgesetz, wenn pro Zeiteinheit eine konstante Menge zugeführt wird?

7. Lösen Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen:
   (a) $y' = 2xy - x^3 + x$
   (b) $xy' - 2y = 2x^4$
   (c) **(HA)** $y' = (\sin x)(1 - y)$
   (d) **(HA)** $y' + y \sin x = \sin x \cos x$

8. Gegeben seien zwei spezielle Lösungen y_1 und y_2 ($y_1 \neq y_2$) der linearen Differentialgleichung $y' + a(x)y = f(x)$. Bestimmen Sie daraus die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

9. Lösen Sie die Integralgleichungen

   (a) $y(x) = \int_0^x y(t)\,dt + x + 1$, (b) $x^2 + y(x) = \int_a^x ty(t)\,dt$.

10. Ein Käfer befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am unteren Ende eines Baumes der Länge ℓ_0. Dieser Baum wächst gleichmäßig mit Geschwindigkeit v_2. Der Käfer beginnt nun mit konstanter Geschwindigkeit v_1 den Baum nach oben zu krabbeln. Erreicht der Käfer jemals die Spitze des Baumes?

11. Lösen Sie die **Bernoullischen Differentialgleichungen**

   (a) $xy' + y = xy^2 \ln x$, (b) **(HA)** $(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$.

12. Lösen Sie die **Riccatischen Differentialgleichungen**

    (a) $y' = (1-x)y^2 + (2x-1)y - x\,,$ (b) **(HA)** $y' = e^{-x}y^2 + y - e^x\,.$

13. Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung $y'\sin 2x = 2(y + \cos x)$, die für $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ beschränkt bleibt.

14. Bestimmen Sie (durch Substitution) die allgemeine Lösung von

    (a) $y' = \sqrt{x+y+1}\,,$ (b) $y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}\,,$ (c) **(HA)** $y' = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}\,.$

15. **(HA)** Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 6$ unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen

    (a) $y(1) = -3\,,$ (b) $y(1) = -2\,.$

16. Prüfen Sie, ob folgende Differentialgleichungen **exakt** sind, und bestimmen Sie die allgemeine Lösung, eventuell mit Hilfe eines **integrierenden Faktors**:

    (a) $x^3dx + y^3dy = 0$

    (b) $x^2 - y^2 - 2xyy' = 0$

    (c) **(HA)** $\dfrac{2x}{y^3}\,dx + \dfrac{y^2-3x^2}{y^4}\,dy = 0$

    (d) **(HA)** $\left(2xy + x^2y + \dfrac{y^3}{3}\right)dx + (x^2+y^2)\,dy = 0$

    (e) $(3x^2y + 4y^2)\,dx + (4xy - y^3)\,dy = 0$

    (f) $(y + xy^2)\,dx + (x - x^2y)\,dy = 0$

17. **(HA)** Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ wird die Differentialgleichung

    $$\lambda y(2-x)y' = 3x^2 + y^2$$

    exakt? Bestimmen Sie für diese λ eine Integralkurve durch den Punkt $(1,1)$.

18. Man beweise: Die Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ besitzt genau dann einen integrierenden Faktor der Form $\mu = \mu(x)$, wenn sie linear ist.

19. Lösen Sie die folgenden homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten bzw. die entsprechenden Anfangswertprobleme:

    (a) $y'' - y' - 6y = 0$

    (b) $y'' + 5y' + 4y = 0\,,\quad y(0) = 2\,,\ y'(0) = 1$

    (c) $y'' - a^2y = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$

    (d) $y'' - 4y' + 13y = 0$

    (e) $y'' + a^2y = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$

(f) $y'' + 2y' + y = 0\,, \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0$

(g) **(HA)** $y^{(4)} - 2y'' = 0$

(h) **(HA)** $y''' + y'' + y' + y = 0\,, \quad y(0) = y'(0) = 0\,,\ y''(0) = 2$

(i) $y^{(4)} + y = 0$

20. Lösen Sie die folgenden linearen inhomogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (mit der Ansatzmethode):

(a) **(HA)** $y^{(4)} + y = x$

(b) $y'' + 2y' + y = x$

(c) **(HA)** $y''' + 2y'' + y' = 2e^{3x}$

(d) $y''' - y = 6e^{-x}$

(e) $y'' + 4y = x^2 + \cos x$

(f) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$

(g) $y'' - 6y' + 8y = e^{2x}$

(h) $y'' - y = e^x$

21. Lösen Sie mit einem komplexen Ansatz:

(a) $y'' + y = e^{2x}\cos 3x$

(b) **(HA)** $y'' + y' + y = e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$

22. Lösen Sie mit Variation der Konstanten:

(a) $y''' + 2y'' + y' = 2e^{3x}$

(b) **(HA)** $y'' + 4y = \cos x$

(c) $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$

23. Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{u}(t) + 4\dot{u}(t) + 4u(t) = 25 \sin t\,,$$

die den Anfangsbedingungen $u(0) = 0\,,\ \dot{u}(0) = 1$ genügt.

24. Lösen Sie mit Hilfe der **Laplace-Transformation** folgende Anfangswertprobleme:

(a) $y'' - 6y' + 9y = 0\,, \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0$

(b) $y'' + 4y' = \cos 2t\,, \quad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1$

(c) **(HA)** $y'' - 9y = e^t\,, \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0$

(d) $y'' + 2y' + y = te^{-t}\,, \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0$

25. Lösen Sie die **Eulerschen Differentialgleichungen**

(a) $x^2y'' + xy' + 2y = 0\,,$ (b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = \ln x\,.$

26. Lösen Sie die Differentialgleichungen

    (a) $x^2y'' + xy' - y = x^3$, (b) $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = x + \dfrac{1}{x}$.

27. Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = x + y$, $y(0) = 1$

    (a) **(HA)** mit Produktansatz
    (b) **(HA)** mit Variation der Konstanten
    (c) mit Potenzreihenansatz
    (d) mit integrierendem Faktor
    (e) mit sukzessiver Approximation.

    Zeigen Sie, dass die Folge der Näherungslösungen aus (e) gegen die Lösung konvergiert.

28. Wenden Sie die Methode der sukzessiven Approximation zur Lösung folgender Anfangswertaufgaben an (3 Glieder angeben):

    (a) $y' = x - y^2$, $y(0) = 0$
    (b) **(HA)** $y' = y^2 + 3x^2 - 1$, $y(1) = 1$
    (c) **(HA)** $y' = y + e^{y-1}$, $y(0) = 1$

29. **(HA)** Lösen Sie $y'' + 4y = \cos x$ mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

30. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = Ax$ mit

    (a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, (c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

31. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x^0$ für

    (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
    mit Hilfe der Eigenwerte und Eigenvektoren,
    (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
    mit der Ansatzmethode,
    (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
    mit der Eliminationsmethode,
    (d) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
    mit der Laplace-Transformation.

32. Lösen Sie die Aufgaben 31(a) und 31(b) mit Hilfe der matrixwertigen Exponentialfunktion. Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ an.

33. Lösen Sie

    (a) $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (vgl. Aufgabe 31(a)),

    (b) $\dot{x} = 4x + y + 36\,t\,, \quad \dot{y} = y - 2x - 2\,e^t\,,$

    (c) **(HA)** $\dot{x} = 5x - 3y + 2\,e^{3t}\,, \quad \dot{y} = x + y + 5\,e^{-t}\,.$

34. Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 4x - y\,, \\ \dot{y} &= 3x + y - z\,, \\ \dot{z} &= x + z\,. \end{aligned}$$

Index