Skript zur Vorlesung

Analysis II

für Physiker

SS 2006

Peter Junghanns

Hinweis: Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Potenz- und Fourierreihen

1.1 Zahlenfolgen und Zahlenreihen. Konvergenzkriterien

Wir waren schon zu Beginn unserer Vorlesung auf die Begriffe der Zahlenfolge und der Zahlenreihe sowie des Grenzwertes bzw. der Summe eingegangen (vgl. Bem. 0.1 und Bem. 0.2). Hier wollen wir nun etwas ausführlicher die Eigenschafen der Folgen und Reihen von Zahlen studieren, um die folgenden Betrachtungen zu Funktionenreihen vorzubereiten.

1.1.1 Nullfolgen und konvergente Zahlenfolgen

Eine Zahlenfolge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ist eine Abbildung $n \mapsto x_n$ der Menge der natürlichen Zahlen in die Menge der komplexen (oder auch nur der reellen) Zahlen.

Definition 1.1 *Die Zahlenfolge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nennt man* **Nullfolge***, wenn zu jeder positiven Zahl ε ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|x_n| < \varepsilon \; \forall\, n > N$ gilt. Die Zahlenfolge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt* **konvergent***, wenn eine Zahl $x \in \mathbb{C}$ existiert, so dass $(x_n - x)_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist. Die Zahl x nennt man dann* **Grenzwert** *von $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ und schreibt dafür*

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \textit{oder kurz} \quad x = \lim x_n\,.$$

Andere Schreibweisen sind

$$x_n \longrightarrow x \quad \textit{für} \quad n \longrightarrow \infty\,, \quad x_n \stackrel{n\in\mathbb{N}}{\longrightarrow} x \quad \textit{oder auch} \quad x_n \longrightarrow x \;(n \in \mathbb{N})\,.$$

Eine nicht konvergente Zahlenfolge nennt man **divergent***. Für den Fall reeller Zahlenfolgen gibt es noch den Begriff der sogenannten bestimmten Divergenz, in Zeichen:* $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$ *. Dies bedeutet, dass für jedes $A > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $x_n > A \;\forall\, n > n$ (bzw. $x_n < -A \;\forall\, n > N$) existiert.*
Die Menge aller Nullfolgen bezeichnen wir mit c_0, die Menge aller konvergenten Zahlenfolgen mit c.

Bemerkung 1.2 *Die folgenden Aussagen lassen sich direkt anhand der Definition der konvergenten Zahlenfolge überprüfen. Lediglich für das Cauchysche Konvergenzkriterium (2) benötigt man zusätzlich die Vollständigkeit der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen (vgl. auch Abschnitt 0.5.5).*

1. $x = \lim_{n\to\infty} x_n \iff \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \varepsilon\ \forall\, n > N$
2. $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c \iff \forall\,\varepsilon >\ \exists\, N \in \mathbb{N} : |x_n - x_m| < \varepsilon\ \forall\, n, m > N$
   Cauchysches Konvergenzkriterium *(vgl. Satz 0.36)*
3. *Aus* $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ *folgt*
$$(x_n \pm y_n)_{n=1}^{\infty}\ ,\ (x_n y_n)_{n=1}^{\infty}\ ,\ (x_n^k)_{n=1}^{\infty}\ ,\ (\gamma\, x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$$
   für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ *und beliebiges* $\gamma \in \mathbb{C}$.
4. *Aus* $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \in c$ *mit* $x = \lim x_n$ *und* $y = \lim y_n$ *folgt*
$$(x_n \pm y_n)_{n=1}^{\infty}\ ,\ (x_n y_n)_{n=1}^{\infty}\ ,\ (\gamma\, x_n)_{n=1}^{\infty} \in c$$
   und
$$\lim(x_n \pm y_n) = x \pm y\,, \quad \lim x_n y_n = x\, y\,, \quad \lim \gamma\, x_n = \gamma\, x$$
   $\forall\, \gamma \in \mathbb{C}$. *Ist* $y \neq 0$, *so existiert ein Index* $N \in \mathbb{N}$ *mit* $y_n \neq 0\ \forall\, n > N$, *und es gilt*
$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}\,.$$
5. *Eine Zahlenfolge* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *nennt man beschränkt, wenn eine Zahl* $M > 0$ *existiert, so dass* $|x_n| \leq M\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ *gilt (vgl. Abschnitt 0.5.5). Die Menge aller beschränkten Zahlenfolgen bezeichnen wir mit* ℓ^∞. *Jede konvergente Zahlenfolge ist beschränkt (vgl. Satz 0.34). Es gilt die Inklusionskette*
$$c_0 \subset c \subset \ell^\infty\,.$$
   Jede beschränkte Zahlenfolge besitzt eine konvergente Teilfolge (vgl. Satz 0.35).
6. *Aus* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ *und* $|y_n| \leq |x_n|\ \forall\, n > n_0$ *folgt* $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$.
7. *Aus* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ *und* $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^\infty$ *folgt* $(x_n y_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$.
8. *Aus* $a = \lim a_n = \lim b_n$ *und* $a_n \leq x_n \leq b_n\ \forall\, n > n_0$ *folgt* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c$ *und* $\lim x_n = a$.
9. *Aus* $a = \lim a_n = \lim b_n$ *folgt* $a = \lim \min\{a_n, b_n\} = \lim \max\{a_n, b_n\}$.
10. *Aus* $x = \lim x_n$, $y = \lim y_n$ *und* $x_n \leq y_n\ \forall\, n > n_0$ *folgt* $x \leq y$.

Beispiel 1.3

1. $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} \in c_0$
2. $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1 \implies (q^n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$
3. $\left(\dfrac{a^n}{n!}\right)_{n=1}^{\infty} \in c_0\ \forall\, a \in \mathbb{C}$

4. $\dfrac{7\,n^2+2\,n+4}{3\,n^2+8} = \dfrac{7+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}}{3+\frac{8}{n^2}} \longrightarrow \dfrac{7}{3}$

5. $\lim \sqrt[n]{\gamma} = 1\ \forall\, \gamma > 0$

6. $\lim \sqrt[n]{3^n+4^n} = 4$

7. $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

1.1.2 Monotone Zahlenfolgen

Definition 1.4 *Eine (reelle) Zahlenfolge* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *heißt* **monoton** *wachsend (fallend), wenn* $x_n \le x_{n+1}$ $(x_n \ge x_{n+1})$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *gilt.*

Satz 1.5 *Jede beschränkte und monotone Zahlenfolge ist konvergent.*

Folgerung 1.6 *Eine monotone Zahlenfolge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.*

Beispiel 1.7

1. $\alpha > 0\,,\ x_n = \dfrac{\alpha^n}{n!}$ *: Es existiert ein Index* $n_0 \in \mathbb{N}$, *so dass* $\dfrac{\alpha}{n+1} < 1\ \forall\, n > n_0$ *und somit*

$$x_{n+1} = x_n \frac{\alpha}{n+1} < x_n \quad \forall\, n > n_0\,.$$

Ferner gilt $x_n > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. *Also ist* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine beschränkte Zahlenfolge: Aus Satz 1.5 folgt die Existenz des Grenzwertes* $x^* = \lim x_n$. *Gehen wir in der Gleichung* $x_{n+1} = x_n \dfrac{\alpha}{n+1}$ *zum Grenzwert für* $n \longrightarrow \infty$ *über, so folgt* $x^* = x^* \cdot 0 = 0$.

2. *Es seien* $\alpha > 0\,,\ x_1 = \sqrt{\alpha}$ *und*

$$x_{n+1} = \sqrt{\alpha + x_n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

D.h.

$$x_n = \underbrace{\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha + \cdots + \sqrt{\alpha}}}}}_{n\ mal}\,.$$

Es folgt $x_n < x_{n+1}$. *Wir zeigen, dass* $x_n \le 1 + \sqrt{\alpha}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt. Für* $n = 1$ *is das offenbar richtig. Sei* $x_k \le 1 + \sqrt{\alpha}$. *Dann folgt*

$$x_{k+1} = \sqrt{\alpha + x_k} \le \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha} + 1} \le \sqrt{\left(\sqrt{\alpha}+1\right)^2} = \sqrt{\alpha} + 1\,.$$

Aus Satz 1.5 folgt die Existenz des Grenzwertes $x^* = \lim x_n$. *Durch Grenzübergang in der Gleichung* $x_{n+1}^2 = \alpha + x_n$ *erhalten wir* $(x^*)^2 = \alpha + x^*$ *und somit*

$$x^* = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \alpha}\,.$$

3. *Es seien* $0 < x_1 < 1$ *und* $x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. *Da aus* $x_k \in (0, 1)$ *sowohl* $2 - x_k > 1$ *und somit* $x_{k+1} > x_k$ *als auch*

$$x_{k+1} = x_k(2 - x_k) = 1 - (1 - x_k)^2 < 1$$

folgt, haben wir $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Somit existiert der Grenzwert* $x^* = \lim x_n$, *wobei* $x^* = x^*(2 - x^*)$ *gilt. Da* x^* *positiv sein muss, folgt* $x^* = 1$.

4. $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$: *Offenbar gilt* $a_{n+1} > a_n$, *und aus* $\dfrac{1}{k!} \le \dfrac{1}{2^{k-1}}$ *folgt auch*

$$a_n \le 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \, .$$

Also gilt $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in c$. *Man definiert* $\lim a_n =: e$ *(Eulersche Zahl):*

$$e = 2,718281828459045\ldots$$

5. $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$: *Aus der binomischen Formel (0.4) folgt*

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + n\,\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\,\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,\frac{1}{n^3} \\ &\qquad + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n}\,\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \\ &\qquad + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\ &= b_{n+1} \, . \end{aligned}$$

Weiterhin ergibt sich

$$b_n < 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} = a_n < 3$$

(vgl. vorhergehendes Beispiel). Somit ist $(b_n)_{n=1}^{\infty} \in c$. *Wir setzen* $\widetilde{e} := \lim b_n$. *Für* $1 \le k < n$ *gilt*

$$b_n > 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) ,$$

woraus für $n \longrightarrow \infty$ bei festgehaltenem k die Ungleichung $\widetilde{e} \geq a_k$ folgt. Dies gilt aber für alle $k \in \mathbb{N}$, so dass $b_n < a_n \leq \widetilde{e}$ und somit $\widetilde{e} = e$ gilt.

1.1.3 Größter und kleinster partieller Grenzwert einer reellen Zahlenfolge

Wir wissen, dass jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. In nun z.B. die reelle Zahlenfolge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nach oben unbeschränkt, so existiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Index $n_k \in \mathbb{N}$ mit $n_k > n_{k-1}$, so dass $x_{n_k} > k$ gilt. Es folgt $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$.
Man nennt die Zahlen $x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, für die eine Teilfolge der reellen Zahlenfolge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ existiert, die x als Grenzwert hat, die **partiellen Grenzwerte** von $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Satz 1.8 *Unter allen partiellen Grenzwerten einer reellen Zahlenfolge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ gibt es einen größten x^* und einen kleinsten x_*, die man mit $\overline{\lim}\, x_n$ bzw. $\underline{\lim}\, x_n$ (oder auch mit $\limsup x_n$ bzw. $\liminf x_n$) bezeichnet. Dabei gilt*

$$x^* = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \quad \text{und} \quad x_* = \lim_{n\to\infty} \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}\,.$$

Eine reelle Zahlenfolge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ist genau dann konvergent oder bestimmt divergent, wenn

$$\limsup x_n = \liminf x_n$$

gilt.

Bemerkung 1.9 (Begriffe Supremum und Infimum) *Ist $A \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Teilmenge der Menge der reellen Zahlen, so bezeichnet man mit $\sup A$ ("Supremum von A") die kleinste obere Schranke von A und mit $\inf A$ ("Infimum von A") die größte untere Schranke von A. Dabei sind $\alpha \in \mathbb{R}$ eine obere und $\beta \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke von A, wenn $\beta \leq x \leq \alpha$ für alle $x \in A$ gilt. Die Existenz der Zahlen $\sup A$ und $\inf A$ kann man beweisen. Ist die Menge A nach oben bzw. nach unten unbeschränkt, so schreibt man $\sup A = \infty$ bzw. $\inf A = -\infty$.*

1.1.4 Zahlenreihen

Definition 1.10 *Für eine beliebige Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definieren wir*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\,, \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Die Folge $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt **Zahlenreihe** *oder auch nur* **Reihe** *und wird mit*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.1}$$

bezeichnet. Man nennt s_n die n-te **Partialsumme** *der Reihe (1.1). Diese Reihe heißt* **konvergent***, falls die Folge $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ der Partialsummen konvergiert, andernfalls* **divergent***. Gilt $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, so schreibt man auch*

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

und nennt s die **Summe** *der Reihe (1.1).*

Beispiel 1.11 *Wir untersuchen einfache Reihen auf Konvergenz.*

1. *Die* **geometrische Reihe***: Es sei* $|q| < 1$. *Wir betrachten*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots \, ,$$

d.h. $a_n = q^n$ *(wobei wir hier bei* $n = 0$ *beginnen). Somit ist*

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \, ,$$

also

$$s = \lim s_n = \frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \, .$$

2. *Die* **harmonische Reihe***:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \tag{1.2}$$

Wir betrachten die Teilfolge $\{s_{2^k}\}_{k=1}^{\infty}$ *der Folge der Partialsummen. Es gilt*

$$\begin{aligned} s_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + k \cdot \frac{1}{2} \, , \end{aligned}$$

woraus $\lim_{k\to\infty} s_{2^k} = \infty = \lim_{n\to\infty} s_n$ *folgt. Die harmonische Reihe* (1.2) *ist also divergent. Wir könnten auch*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

schreiben.

3. *Die* **Zahl** e*: Aus Beispiel 1.7,(4) folgt*

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \, .$$

Folgerung 1.12

1. *(Monotoniekriterium) Gilt* $a_n \geq 0 \; \forall\, n \geq n_0$, *so konvergiert die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *genau dann, wenn die Folge* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *der Partialsummen nach oben beschränkt ist (vgl. Satz 1.5).*

2. *(Notwendiges Konvergenzkriterium) Ist die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent, so ist* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine Nullfolge.*

3. *(Cauchysches Konvergenzkriterium) Die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert genau dann, wenn für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein Index* $N \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass*

$$\left| \sum_{k=n}^{n+\ell} a_k \right| < \varepsilon$$

für alle $n > N$ *und für alle* $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ *gilt (vgl. Bem. 1.2,(2)).*

Beispiel 1.13

1. **Verallgemeinerte harmonische Reihen***: Für* $\alpha > 1$ *betrachten wir die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}\,. \tag{1.3}$$

Für die Teilfolge $\left\{s_{2^k-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *der Folge der Partialsummen gilt*

$$\begin{aligned}
s_{2^k-1} &= 1 + \left(\frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}}\right) + \left(\frac{1}{4^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{7^{\alpha}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^k)^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^{\alpha}}\right) \\
&\leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^{\alpha}} + 4 \cdot \frac{1}{4^{\alpha}} + \cdots + 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^{\alpha}} \\
&= 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k \\
&= \frac{1 - \left(\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{k+1}}{1 - \dfrac{1}{2^{\alpha-1}}} < \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2^{\alpha-1}}}\,.
\end{aligned}$$

Somit ist die Folge $\left\{s_{2^k-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *beschränkt, woraus auch die Beschränktheit der Folge* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *(Monotonie!) und somit die Konvergenz der Reihe* (1.3) *folgt.*

2. *Die* **Leibniz-Reihe***:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots$$

Wir betrachten zuerst $\{s_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ *. Es gilt*

$$s_{2k} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) < s_{2(k+1)} .$$

Also ist die Folge $\{s_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ *monoton wachsend. Die Folge* $\{s_{2k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ *ist wegen*

$$s_{2k+1} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

monoton fallend. Ferner gilt $s_{2k+1} > s_{sk}$ *und*

$$s_{2k+1} - s_{2k} = \frac{1}{2k+1} \longrightarrow 0 \quad (k \in \mathbb{N}) .$$

Somit sind beide Folgen konvergent und haben den gleichen Grenzwert, womit die Konvergenz der Leibniz-Reihe gezeigt ist.

3. **Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen***: Ersetzt man im vorhergehenden Beispiel* $\frac{1}{n}$ *durch* a_n *, so kann man völlig analog folgendes beweisen: Ist* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine monoton fallende Nullfolge aus positiven Zahlen, so konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n .$$

4. *Aus den Regeln über das Rechnen mit Grenzwerten von Zahlenfolgen (siehe Bem. 1.2,(4)) ergibt sich folgendes: Sind* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergente Reihen mit den Summen* a *und* b*, so sind auch die Reihen* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} (\gamma\, a_n)$ *konvergent, wobei*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = a + b \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma\, a_n) = \gamma\, a$$

gilt und γ *eine beliebige komplexe Zahl sein kann.*

1.1.5 Umordnung von Reihen

Definition 1.14 *Die Zahlenreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nennt man* **absolut konvergent***, wenn die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konvergiert. Anderenfalls heißt sie* **bedingt konvergent***.*

Aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium folgt, dass jede absulut konvergente Reihe auch konvergent ist.

Satz 1.15 (Umordnung absolut konvergenter Reihen) *Es seien* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine absolut konvergente Reihe und* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *eine Bijektion. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.$$

Satz 1.16 (Riemannscher Umordnungssatz) *Es seien* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine bedingt konvergente Reihe reeller Zahlen und* $\sigma \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *eine beliebige Zahl. Dann existiert eine Bijektion* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *mit der Eigenschaft*

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} \,.$$

Beispiel 1.17 *Wir betrachten die Leibniz-Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *mit* $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, *von der wir wissen, dass*

$$s = \lim s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

eine positive endliche Zahl ist. Für die Bijektion $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$,

$$n \mapsto \begin{cases} 2k-1 & : \quad n = 3k-2, \quad k \in \mathbb{N}\,, \\ 4k-2 & : \quad n = 3k-1, \quad k \in \mathbb{N}\,, \\ \quad 4k & : \quad \quad n = 3k, \quad k \in \mathbb{N}\,, \end{cases}$$

erhalten wir die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdot + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \cdots\,, \tag{1.4}$$

deren Partialsummen wir mit s'_n *bezeichnen. Dann ist*

$$\begin{aligned} s'_{3m} &= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2}\, s_{2m} \longrightarrow \frac{1}{2}\, s \quad (m \in \mathbb{N})\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$s'_{3m-1} = s_{3m} + \frac{1}{4m} \longrightarrow \frac{1}{2}\,s \quad \textit{und} \quad s'_{3m-2} = s'_{3m-1} + \frac{1}{4m-2} \longrightarrow \frac{1}{2}\,s \quad (m \in \mathbb{N})\,,$$

so dass die Summe der umgeordneten Reihe (1.4) *gleich* $\lim s'_n = \frac{1}{2}\,s$ *ist.*

Satz 1.18 (Cauchy-Produkt von Reihen) *Es seien* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *absolut konvergente Reihen mit den Summen* a *und* b. *Dann ist die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *mit*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

ebenfalls absolut konvergent, wobei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = a \cdot b$ *gilt.*

Beispiel 1.19 *Die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *konvergiert für jedes* $z \in \mathbb{C}$ *absolut (siehe Bsp. 1.20,(4) im folgenden Abschnitt). Wir bezeichnen ihre Summe mit* $s(z)$. *Für beliebige* $z, w \in \mathbb{C}$ *folgt aus dem Satz 1.18 und der binomischen Formel (0.4)*

$$\begin{aligned}
s(z)s(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} \\
&= s(z+w)\,.
\end{aligned}$$

1.1.6 Konvergenzkriterien für Reihen mit positiven Gliedern

In diesem Abschnitt seien $a_n > 0$ und $b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

1. **Majorantenkriterium**:

   Gilt $a_n \le b_n \;\forall\, n > n_0$, so folgt aus der Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und aus der Divergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ die Divergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

2. **Quotientenkriterium**:

   (a) Existiert eine Zahl $q < 1$, so dass $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le q \ \forall n > n_0$, so ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

   (b) Gilt $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 \ \forall n > n_0$, so ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

   (c) Existiert der Grenzwert $q = \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, so ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, falls $q < 1$, und divergent, falls $q > 1$.

3. **Wurzelkriterium**:

   (a) Existiert eine Zahl $w < 1$, so dass $\sqrt[n]{a_n} \le w \ \forall n > n_0$, so ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

   (b) Gilt $\sqrt[n]{a_n} \ge 1 \ \forall n > n_0$, so divergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

   (c) Existiert der Grenzwert $w = \lim \sqrt[n]{a_n}$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, falls $w < 1$, und sie divergiert, falls $w > 1$.

4. **Vergleichskriterien**:

   (a) Es existiere der Grenzwert $q = \lim \dfrac{a_n}{b_n}$. Ist $q < \infty$, so folgt aus der Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und aus der Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ die Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Ist $q > 0$, so folgt aus der Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ die Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und aus der Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Im Fall $q \in (0, \infty)$ konvergieren bzw. divergieren also beide Reihen gleichzeitig.

   (b) Gilt $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \dfrac{b_{n+1}}{b_n} \ \forall n > n_0$, so folgt aus der Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und aus der Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ die Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Beispiel 1.20

1. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \dfrac{1}{3^n}$ *konvergiert, da* $2^n \sin \dfrac{1}{3^n} < \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ *gilt.*

2. *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ *divergiert wegen* $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}$.

3. *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ *divergiert, da* $\lim \frac{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$.

4. *Für* $x > 0$ *konvergiert die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, *da für* $a_n = \frac{x^n}{n!}$ *gilt* $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{n+1} \longrightarrow 0$.

5. *Sei* $x > 0$. *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1}$ *konvergiert für* $x < 1$ *und divergiert für* $x \geq 1$, *da für* $a_n = n\,x^{n-1}$ *gilt* $\frac{a_{n+1}}{a_n} = x\,\frac{n+1}{n} \longrightarrow x$.

6. *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$ *konvergiert für alle* $x > 0$, *da mit* $a_n = \left(\frac{x}{n}\right)^n$ *gilt* $\sqrt[n]{a_n} = \frac{x}{n} \longrightarrow 0$.

7. *Für* $a_n = n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ *gilt* $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{x}{e}$. *Da außerdem* $\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1$ *gilt, konvergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ *für* $0 < x < e$ *und divergiert für* $x \geq e$.

1.1.7 Das Abelsche und das Dirichletsche Kriterium

Wir betrachten zwei Zahlenfolgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ und verwenden die Bezeichnung $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

1. Sind die Folge $(A_n b_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ konvergent, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

2. **Abelsches Kriterium**: Sind die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und die Folge $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ monoton und beschränkt, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

3. **Dirichletsches Kriterium**: Ist die Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt und ist die Folge $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ eine monotone Nullfolge, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

Beispiel 1.21 *Für* $a_n = \sin n\,x$ *und* $b_n = \dfrac{1}{n}$ *erhalten wir*

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=1}^{n} \sin k\,x = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin k\,x \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right] \\ &= \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,. \end{aligned}$$

Es folgt $|A_n| \le \dfrac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$, *falls* $x \ne 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. *Aus dem Dirichletschen Kriterium folgt die Konvergenz der Reihe* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\,x}{n}$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

1.2 Übungsaufgaben

1. Verwenden Sie Folgerung 1.6:

   (a) Es seien $c > 0$, $x_1 \in \left(0, c^{-1}\right)$ und $x_{n+1} = x_n(2 - c\,x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Existiert $\lim_{n\to\infty} x_n$? Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

   (b) Es seien $0 \le a_1 < b_1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ und $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$ Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ denselben Grenzwert haben.

2. Geben Sie alle partiellen Grenzwerte von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ an:

   (a) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1-(-1)^n}{2}$, (b) $a_n = n^{(-1)^n}$, (c) **(HA)** $a_n = \dfrac{2}{n} + \cos\dfrac{\pi n}{2}$.

3. Es seien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent und $p > 1$. Zeigen Sie, dass dann auch $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ konvergiert.

4. Man zeige: Sind $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ konvergent, so konvergieren auch $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ und **(HA)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^2$.

5. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz (Hinweis: Majoranten- und Vergleichskriterien, Leibnizkriterium):

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [\ln(n+1) - \ln n]$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctan n)^n}{2^n}$,

(d) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$, (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$,

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{3}-1\right)$, (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$, (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\alpha}{n}$ $(\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$,

(j) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$, (k) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3-1}$, (l) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$,

(m) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$, (n) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$, (o) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, (p) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$,

(q) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln(\ln n)}}$, (r) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$, (s) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{\alpha}{n}$ $(\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$.

6. Untersuchen Sie folgende Reihen mit Hilfe des Wurzel- oder Quotientenkriteriums auf Konvergenz, gegebenfalls mit Fallunterscheidungen bezüglich $\alpha \in \mathbb{R}$:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2^n}$, (c) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-(-1)^n}{2^n}$, (d) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\alpha}{3^n}$,

(e) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{\alpha}{n}\right)^n$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 5^n}{(2n)!}$, (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$,

(i) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n}$, (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$, (k) **(HA)** $\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{n-1}$.

1.3 Funktionenfolgen

Wir betrachten eine Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ von Funktionen

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \dots ,$$

wobei D ein Intervall oder auch eine Vereinigung von Intervallen ist.

Definition 1.22 *Man sagt, dass die Funktionenfolge* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ **punktweise** *gegen* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *konvergiert, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall\, x \in D$$

gilt.

Beispiel 1.23 *Die Funktionen* $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit*

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$$

konvergieren auf $\mathbb{R}$ *punktweise gegen die Funktion* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| < 1\,, \\ \dfrac{1}{2} & , \quad |x| = 1\,, \\ 0 & , \quad |x| > 1\,. \end{cases}$$

Definition 1.24 *Man sagt, dass die Funktionenfolge* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ **gleichmäßig** *(auf* D*) gegen die Funktion* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *konvergiert, wenn für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein Index* $N \in \mathbb{N}$ *existiert, so dass*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in D\,,\ \forall\, n > N$$

gilt.

Satz 1.25 *Die Funktionen* $f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *seien stetig und gleichmäßig konvergent gegen* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$*. Dann ist auch die Funktion* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig. Das kann man auch wie folgt interpretieren: Für eine Folge* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D$ *mit* $x_k \longrightarrow x^* \in \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$ *gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x_k) = \lim_{n\to\infty} f_n \left(\lim_{k\to\infty} x_k \right)$$

(Vertauschung zweier Grenzprozesse).

Beispiel 1.26 *Die Funktionen* $f_n : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto x^n$ *konvergieren nicht gleichmäßig gegen* $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto 0\,,$ *denn für* $x_k = 1 - k^{-1}$ *gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x_k) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} f_n \left(\lim_{k\to\infty} x_k \right)\,.$$

Satz 1.27 *Die Funktionen* $f_n : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *seien differenzierbar, und sowohl* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *als auch* $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ *seien auf* (a,b) *gleichmäßig konvergent. Dann ist auch die Grenzfunktion* $f(x) = \lim f_n(x)$ *auf* (a,b) *differenzierbar, und es gilt*

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \forall\, x \in (a,b)$$

(Vertauschung von Differentiation und Grenzwertbildung).

Satz 1.28 *Die Funktionen* $f_n \in \mathbb{R}[a,b]$ *seien gleichmäßig konvergent auf* $[a,b]$ *gegen die Funktion* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$*. Dann ist auch* f *auf* $[a,b]$ *Riemann-integrierbar, und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

(Vertauschung von Integration und Grenzwertbildung).

Beispiel 1.29 $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $f_n(x) \longrightarrow 0 \; \forall x \in [0,1)$. *Obwohl die Konvergenz* **nicht** *gleichmäßig ist, gilt*

$$\int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) .$$

Beispiel 1.30 $f_n : [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^{-n}$, $f_n(x) \longrightarrow 0 \; \forall x \in [1,\infty)$. *Auch hier ist die Konvergenz* **nicht** *gleichmäßig. Trotzdem gilt* $(n \geq 2)$

$$\int_1^\infty x^{-n} \, dx = \frac{1}{1-n} \left[x^{1-n} \right]_1^\infty = \frac{1}{n-1} \to 0 \quad (n \to \infty) .$$

1.4 Funktionenreihen

Definition 1.31 *Für eine gegebene Funktionenfolge* $(f_n)_{n=1}^\infty$, $f_n : D \to \mathbb{R}$ *setzen wir* $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, $x \in D$. *Die Funktionenreihe* $\sum_{n=1}^\infty f_n$ *heißt* **punktweise** *bzw.* **gleichmäßig konvergent***, wenn* $(s_n)_{n=1}^\infty$ *diese Eigenschaft hat.*

Die Menge aller beschränkten Funktionen $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $B(D,\mathbb{R})$, die Teilmenge der beschränkten stetigen Funktionen mit $BC(D,\mathbb{R})$. Für $f \in B(D,\mathbb{R})$ definieren wir

$$\|f\|_{D,\infty} = \|f\|_\infty := \sup \{ |f(x)| : x \in D \} .$$

Mit $BC^1(D,\mathbb{R})$ sei die Menge der stetig differenzierbaren Funktionen $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet.

Folgerung 1.32 (Cauchysches Konvergenzkriterium) *Die Reihe* $\sum_{n=1}^\infty f_n$, $f_n \in B(D,\mathbb{R})$, *konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein Index* N *existiert, so dass*

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+m} f_k \right\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n \geq N , \; \forall m \geq 0 .$$

Definition 1.33 *Die Reihe* $\sum_{n=1}^\infty f_n$, $f_n \in B(D,\mathbb{R})$, *heißt* **gleichmäßig absolut konvergent***, wenn* $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_\infty$ *konvergiert.*

Folgerung 1.34

1. *Sind* $\|f_n\|_\infty \leq a_n$ *und* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *konvergent, so ist* $\sum_{n=1}^\infty f_n$ *gleichmäßig absolut konvergent.*

2. *Seien* $f_n \in BC(D,\mathbb{R})$. *Ist die Reihe* $\sum_{n=1}^\infty f_n$ *gleichmäßig konvergent, so gilt* $s = \sum_{n=1}^\infty f_n \in BC(D,\mathbb{R})$ *(vgl. Satz 1.25).*

3. *Seien* $f_n \in BC^1(D,\mathbb{R})$. *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konvergiere für ein* $x \in D$, *die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ *sei gleichmäßig konvergent. Dann ist auch die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *gleichmäßig konvergent, und es gilt* $s = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in BC^1(D,\mathbb{R})$, *wobei*

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \quad \forall\, x \in D$$

(vgl. Satz 1.27).

4. *Seien* $f_n \in \mathbb{R}[a,b]$. *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *sei gleichmäßig konvergent. Dann gilt* $s = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathbb{R}[a,b]$ *und*

$$\int_a^b s(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

(vgl. Satz 1.28).

1.5 Potenzreihen

Unter einer **Potenzreihe** versteht man eine Funktionenreihe der Gestalt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\,, \tag{1.5}$$

wobei die Zahlenfolge $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ gegeben sind. Die Partialsummen einer solchen Reihe sind also Polynome.

Satz 1.35 *Wir setzen* $a = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ *und*

$$r = \begin{cases} 0 & : \quad a = \infty\,, \\ \infty & : \quad a = 0\,, \\ \dfrac{1}{a} & : \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Reihe (1.5) *konvergiert für alle* $z \in U_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < r\}$ *und auf* $D = \overline{U}_{r_0}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| \le r_0\}$, $0 < r_0 < r$, *gleichmäßig absolut. Für* $|z| > r$ *divergiert die Reihe* (1.5). *Man nennt die Zahl* r *den* **Konvergenzradius** *der Reihe* (1.5).

Bemerkung 1.36 *Existiert der Grenzwert* $\lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = c$, *so gilt* $c = r$, *was wegen*

$$\left|\frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n(z-z_0)^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z-z_0| \longrightarrow \frac{|z-z_0|}{c}$$

aus dem Quotientenkriterium für Reihen und Satz 1.35 folgt.

Bemerkung 1.37 *Die Summenfunktion* $s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *ist stetig auf* $U_r(z_0)$.

Beispiel 1.38

1. *Die Reihen* $\sum_{n=1}^{\infty} n\, z^n$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 z^n$ *konvergieren für* $|z| < 1$ *und divergieren für* $|z| \geq 1$.

2. *Die Potenzreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$ *konvergiert für* $|z| < 1$ *und* $z = 1$.

3. *Die Potenzreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$ *konvergiert für alle* $z \in \mathbb{C}$.

4. *Die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *konvergiert für alle* $z \in \mathbb{C}$. *Ihre Summe ist gleich* e^z.

Satz 1.39 *Die Reihen* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ *mögen die Konvergenzradien* r_a *bzw.* r_b *haben. Dann konvergieren Summe und Produkt der Reihen*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) z^k\,, \qquad \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

mit $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$ *für* $|z| < \min\{r_a, r_b\}$.

Beispiel 1.40 $\frac{e^z}{1-z} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\right) z^k\,,\ |z| < 1$.

Satz 1.41 *Potenzreihen kann man im Konvergenzkreis gliedweise differenzieren und integrieren, d.h., für* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $|z| < r$, *gilt*

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k z^{k-1}\,, \quad |z| < r\,,$$

und

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}\, x^{k+1}\,, \quad -r < x < r\,.$$

Beispiel 1.42 *Man berechne die Summenfunktion*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^k , \quad |z| < 1 .$$

Lösung: Es gilt

$$f(z) = z \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} = z \left(\sum_{k=1}^{\infty} z^k \right)' = z \left(\frac{1}{1-z} \right)' = \frac{z}{(1-z)^2} .$$

Beispiel 1.43 *Für $-1 < x < 1$ berechne man*

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} .$$

Lösung: Es ist

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x t^{k-1}\, dt = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1} \right) dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x) .$$

Folgerung 1.44

1. *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ sei für $|z-z_0| < r$ konvergent. Mit $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ bezeichnen wir die entsprechende Summenfunktion. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
a_0 &= f(z_0) , \\
f'(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z-z_0)^{k-1} \implies a_1 = f'(z_0) , \\
&\vdots \\
f^{(n)}(z) &= \sum_{k=n}^{\infty} a_k k(k-1)\cdots(k-n+1)(z-z_0)^{k-n} \implies a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) , \\
&\vdots
\end{aligned}$$

   Die Potenzreihe ist also stets die Taylorreihe ihrer Summe.

2. *Es seien $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, $|z| < r$ $(r > 0)$, $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ und $f(z_n) = g(z_n)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Da f und g stetig sind, folgt*

$$a_0 = f(0) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = g(0) = b_0 .$$

Daraus ergibt sich $f_1(z_n) = g_1(z_n)$ *mit*

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1} = \frac{1}{z}[f(z) - a_0] \quad \textit{und} \quad g_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{k-1} = \frac{1}{z}[g(z) - b_0]\,.$$

Also $a_1 = b_1$, *usw. (vollständige Induktion* $\Longrightarrow$ **Identitätssatz** *für Potenzreihen).*

3. *Die Reihe* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *habe den Konvergenzradius* r *und sei auch für* $x = r$ *konvergent. Dann ist* f *in* r *linksseitig stetig, d.h., es gilt* $\lim_{x\to r-0} f(x) = f(r)$.

Beispiel 1.45 *Die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^n$, $-1 < x < 1$, *ist die Taylorreihe von* $f(x) = \ln(1+x)$ *(vgl. Bsp. 1.43). Sie konvergiert auch für* $x = 1$ *(Leibniz-Reihe). Also gilt nach Folgerung 1.44,(3)*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots = \ln 2$$

(vgl. Abschnitt 0.7.2, Bsp. 0.24,(4)).

Beispiel 1.46 *Analog zum vorhergehenden Beispiel haben wir*

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}\,, \quad -1 < x < 1\,,$$

und für $x = 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

(vgl. Abschnitt 0.7.3, Bsp. 0.25).

1.6 Fourierreihen

1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat die Periode L, wenn $f(x+L) = f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ gilt. Setzen wir $\widetilde{f}(t) = f\left(\frac{L\,t}{2\pi}\right)$, so folgt $\widetilde{f}(t+2\pi) = f\left(\frac{L\,t}{2\pi} + L\right) = f\left(\frac{L\,t}{2\pi}\right) = \widetilde{f}(t)$, d.h. $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat die Periode 2π. Deshalb beschränken wir uns im weiteren auf Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Periode 2π.

2. Die trigonometrischen Funktionen $\cos nx$, $\sin nx$, $n \in \mathbb{N}$, haben die Periode $\frac{2\pi}{n}$. Das Funktionensystem $\{1,\ \cos nx,\ \sin nx : n = 1, 2, \ldots\}$ heißt **trigonometrisches Funktionensystem**.

3. Wir betrachten folgende Aufgabenstellung: Gegeben sei eine 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir suchen Zahlenfolgen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, so dass

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad \text{(Fourierreihe)}$$

gilt.

4. Nehmen wir an, dass die Fourierreihe gleichmäßig konvergiert, so folgt

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx \, dx \right) .\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \ dx = \left[\frac{-1}{k} \cos kx \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \ dx \, , \quad k = 1, 2, \ldots$$

und

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx \ dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+k)x - \sin(n-k)x] dx = 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx \ dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-k)x - \cos(n+k)x] dx = \begin{cases} 0 & : \ n \neq k \, , \\ \pi & : \ n = k \, . \end{cases}\end{aligned}$$

Also folgt

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \, , \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.6}$$

und analog

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \ dx \, , \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.7}$$

Man nennt a_n und b_n die **Fourierkoeffizienten** der Funktion f .

5. Ist f eine gerade Funktion, so gilt $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, und

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \, , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

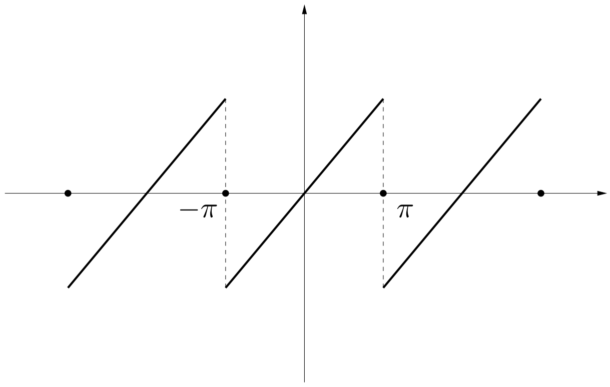
Ist f ungerade, so folgt $a_n = 0$, $n = 0, 1, \ldots$, und

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \, , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Beispiel 1.47 (Sägezahnkurve) *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π*−periodisch mit*

$$f(x) = \begin{cases} ax & : \quad -\pi < x < \pi\,, \\ 0 & : \quad x = \pi\,, \end{cases}$$

wobei $a > 0$ *gegeben ist.*



Sägezahnkurve

Die Fourierreihe dieser Funktion ist gleich

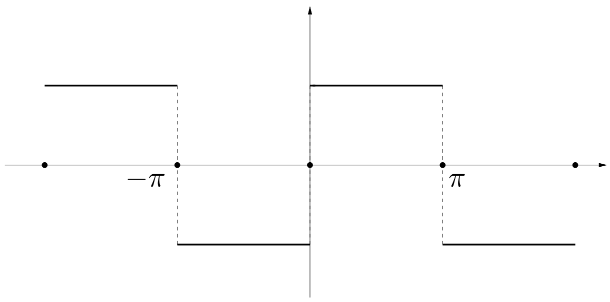
$$2a\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right) = 2a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\,.$$

Für $a = \frac{1}{2}$ *und* $x = \frac{\pi}{2}$ *erhalten wir die Zahlenreihe (vgl. Bsp. 1.46 und Theorem 1.49)*

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\,. \tag{1.8}$$

Beispiel 1.48 (Rechteckfunktion) *Es seien* $a > 0$ *und* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π*-periodisch mit*

$$f(x) = \begin{cases} a & : \quad 0 < x < \pi\,, \\ 0 & : \quad x = 0,\ x = \pi\,, \\ -a & : \quad -\pi < x < 0\,. \end{cases}$$



Rechteckfunktion

Die Fourierreihe dieser Funktion hat die Gestalt

$$\frac{4a}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right) = \frac{4a}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}\,.$$

Für $a = \frac{\pi}{4}$ *und* $x = \frac{\pi}{2}$ *erhalten wir wieder die Reihe* (1.8).

Theorem 1.49 (Konvergenz von Fourierreihen) *Die* 2π*-periodische Funktion* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *sei stetig und differenzierbar mit Ausnahme endlich vieler Punkte auf einem Intervall der Länge* 2π. *In diesen Punkten mögen die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von* f *und* f' *existieren. Ferner sei in einem solchen Punkt* $\widetilde{x}$ *stets*

$$f(\widetilde{x}) = \frac{1}{2}\left[f(\widetilde{x}+0) + f(\widetilde{x}-0)\right]\,.$$

Dann konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen $f(x)$ *und in jedem Intervall* $[\alpha,\beta]$, $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, *welches keine Unstetigskeitspunkte von* f *enthält, gleichmäßig.*

Beispiel 1.50 *Für* $-\pi < x < \pi$ *gilt*

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right)\,.$$

Es folgt

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \textit{und} \quad \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\,.$$

Beispiel 1.51 *Für* $-\pi < x < \pi$ *gilt*

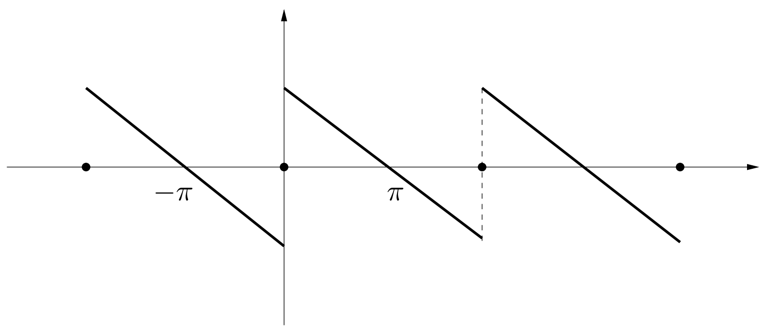
$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right)\,,$$

woraus

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

folgt.

Beispiel 1.52



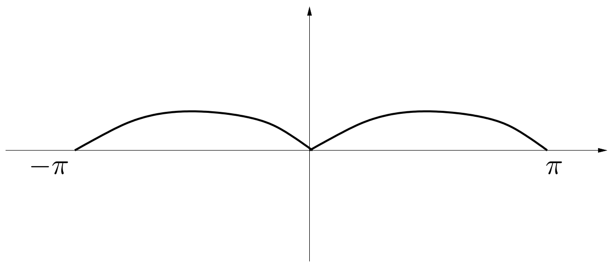
rückwärtige Sägezahnkurve

Für $x \in (0, 2\pi)$ gilt

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

Beispiel 1.53 *Für $x \in \mathbb{R}$ ist*

$$|\sin x| = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}\right].$$



$f(x) = |\sin x|$

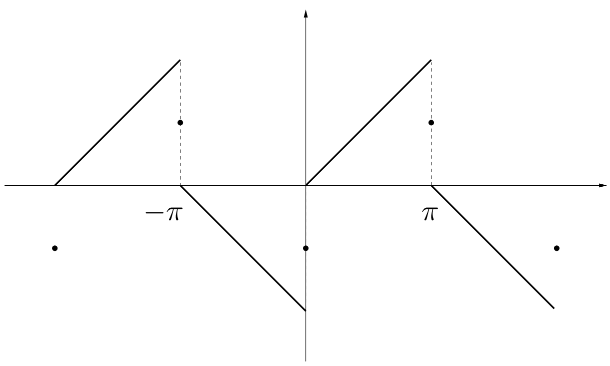
Beispiel 1.54 *Eine 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt* **alternierend**, *wenn $f(x) = -f(x + \pi)$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$ gilt. In einem solchen Fall gilt*

$$a_{2n} = 0\,,\ n = 0, 1, \dots\,, \quad b_{2n} = 0\,,\ n = 1, 2, \dots$$

und

$$a_{2n+1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(2n+1)x\,dx\,, \quad b_{2n+1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(2n+1)x\,dx\,.$$

Die alternierende Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) = x$, $0 < x < \pi$, und $f(\pi) = \dfrac{\pi}{2}$.



Beispiel einer alternierenden Funktion

Man erhält

$$f(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}\,.$$

Einige Betrachtungen zum **Beweis** des Konvergenztheorems 1.49:

(a) Es gilt (siehe Bsp. 0.99)

$$\sin(2n+1)t = \left[1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos 2kt\right] \sin t\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,\ n = 0, 1, 2, ...$$

(b) Wir betrachten die Partialsumme der Fourierreihe

$$\begin{aligned}
s_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{\cos(kt)\cos(kx) + \sin(kt)\sin(kx)\}\right] dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k(t-x))\right] dt \\
&\overset{(a)}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left[(2n+1)\frac{t-x}{2}\right]}{2\sin\frac{t-x}{2}}\, dt \\
&= \left| \begin{array}{c} \lambda = n + \frac{1}{2} \\ z = t - x \end{array} \right| = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\, \frac{\sin(\lambda z)}{2\sin\frac{z}{2}}\, dz \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} [f(x+z) - f(x+0)]\, \frac{\sin(\lambda z)}{2\sin\frac{z}{2}}\, dz + \frac{f(x+0)}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(\lambda z)}{2\sin\frac{z}{2}}\, dz \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} [f(x+z) - f(x-0)]\, \frac{\sin(\lambda z)}{2\sin\frac{z}{2}}\, dz + \frac{f(x-0)}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin(\lambda z)}{2\sin\frac{z}{2}}\, dz\,.
\end{aligned}$$

(c) Aus (a) folgt (vgl. auch Bsp. 0.99)

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

und somit

$$\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(\lambda z)}{2\sin\frac{z}{2}}\, dz = \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin(\lambda z)}{2\sin\frac{z}{2}}\, dz = \frac{\pi}{2}\,.$$

(d) Die anderen beiden Integrale nach dem letzten Gleichheitszeichen in (b) streben für $\lambda \to \infty$ gegen Null, wobei die Konvergenz für x aus einem Intervall, welches keine Sprungstellen von f unf f' enthält, gleichmäßig ist.

Bemerkung 1.55 (Besselsche Ungleichung) *Ist* $f \in \mathbb{R}[-\pi, \pi]$, *so gilt*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx \, .$$

Beweis. *Die Ungleichung folgt aus*

$$\begin{aligned} 0 &\le \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos kx + b_k \sin kx] \right) \right\}^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \{ [f(x)]^2 - 2f(x)(\ldots) + (\ldots)^2 \} \, dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \right] . \end{aligned}$$

□

Folgerung 1.56 *Ist* $f \in \mathbb{R}[-\pi, \pi]$, *so gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Bemerkung 1.57 *Es sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar und* 2π*-periodisch. Dann ist nach Bem. 1.55*

$$\frac{a_0(f')^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k(f')^2 + b_k(f')^2 \right] < \infty \, .$$

Aus

$$a_k(f') = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx \, dx = \Big[f(x) \ \cos(kx) \Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = k \, b_k$$

und

$$b_k(f') = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx \, dx = -k \, a_k$$

folgt somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left[a_k(f)^2 + b_k(f)^2 \right] < \infty \, .$$

Wegen

$$\begin{aligned}
|a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)| &\le |a_k|+|b_k| \\
&= \frac{1}{2}\left(2\,\frac{1}{k}\,k|a_k|+2\,\frac{1}{k}\,k|b_k|\right) \\
&\le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2}+k^2|a_k|+\frac{1}{k^2}+k^2|b_k|\right) \\
&= \frac{1}{k^2}+\frac{k^2}{2}(|a_k|^2+|b_k|^2)
\end{aligned}$$

folgt die absolut gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe für $f(x)$ und außerdem

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|<\infty\,,\quad \sum_{k=1}^{\infty}|b_k|<\infty\,.$$

Bemerkung 1.58 (komplexe Fourierreihen) *Unter Verwendung der Formel von Moivre*

$$e^{\mathbf{i}nx}=\cos nx+\mathbf{i}\sin nx$$

und der Beziehung

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{\mathbf{i}nx}\,dx=\begin{cases}2\pi & : \quad n=0\,,\\ 0 & : \quad n=\pm1,\pm2,\dots\end{cases} \tag{1.9}$$

können wir die Fourierreihe auch in der Form

$$\begin{aligned}
\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\,\frac{e^{\mathbf{i}nx}+e^{-\mathbf{i}nx}}{2}+b_n\,\frac{e^{\mathbf{i}nx}-e^{-\mathbf{i}nx}}{2\mathbf{i}}\right) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-b_n\mathbf{i}}{2}\,e^{\mathbf{i}nx}+\frac{a_n+b_n\mathbf{i}}{2}\,e^{-\mathbf{i}nx}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widetilde{a}_n e^{\mathbf{i}nx}
\end{aligned}$$

schreiben, wobei

$$\widetilde{a}_0=\frac{a_0}{2}\,,\ \widetilde{a}_n=\frac{a_n-b_n\mathbf{i}}{2}\,,\ \widetilde{a}_{-n}=\frac{a_n+b_n\mathbf{i}}{2}\,,\ n=1,2,\dots\,,$$

zu setzen ist. Es ist also

$$\widetilde{a}_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos nx-\mathbf{i}\sin nx)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-\mathbf{i}nx}\,dx\,,\quad n\in\mathbb{Z}\,.$$

Dieses Resultat erhält man auch unter Verwendung der Beziehung (1.9) *mit dem Ansatz*

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widetilde{a}_n e^{\mathbf{i}nx}\,,$$

Multiplikation mit $e^{-\mathbf{i}kx}$ für $k \in \mathbb{Z}$ und Integration über $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\mathbf{i}kx}\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{a}_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathbf{i}(n-k)x}\,dx = 2\pi\widetilde{a}_k\,.$$

Beispiel 1.59 *Das Anfangswertproblem*

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + k\,x = K(t)\,, \quad x(0) = x_0\,,\ \dot{x}(0) = v_0$$

für eine gedämpfte erzwungene Schwingung kann man bei bekannter Fourierreihe

$$K(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{\mathbf{i}n\omega t}$$

mittels des Ansatzes

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{\mathbf{i}n\omega t}$$

lösen.

1.7 Übungsaufgaben

1. Man untersuche die Funktionenfolgen (f_n) auf gleichmäßige bzw. punktweise Konvergenz:

   (a) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}\,,\ -\infty < x < \infty\,,$ (b) $f_n(x) = \sin\dfrac{x}{n}\,,\ -\infty < x < \infty\,,$

   (c) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}\,,\ x \in [0,1]\,,$ (d) $f_n(x) = x^n\,,\ x \in [0, 1-\varepsilon]\,,\ (\varepsilon > 0)$

   (e) $f_n(x) = x^n\,,\ x \in [0,1]\,.$

2. Untersuchen Sie folgende Reihen auf punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n\,,\ x \in [-q, q]$ mit $q < 1\,,$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n\,,\ x \in (-1, 1)\,,$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\,,\ x \in [-1, 1]\,,$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,,\ x \in [a, b]\,.$

3. Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}(z-1)^n\,,$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n\,,$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{a^n + b^n}\,,$ $(a, b > 0)\,,$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{n!}\,,$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{2^n}\,,$ (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1 + 2\cos\frac{n\pi}{4})^n}{\ln n} z^n\,.$

4. Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Potenzreihe und geben Sie den Konvergenzradius dieser Reihe an:
   (a) $f(x) = e^{-x^2}$
   (b) $f(x) = \sinh x$
   (c) $f(x) = \sin x \cos x$
   (d) $f(x) = a^x$
   (e) $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$
   (f) $f(x) = \ln(1 + x + x^2 + x^3)$
   Hinweis: geom. Summenformel

5. Man stelle durch eine Reihe dar:
   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,dt\,,$ (b) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt\,,$ (c) $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt\,.$

6. Ermitteln Sie die Summe und den Konvergenzbereich folgender Reihen (Hinweis: gliedweise Integration, um bekannte Reihen zu erhalten):
   (a) $1 - 3x^2 + 5x^4 - \ldots\,,$ (b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \ldots\,,$

   Soweit nicht anders angegeben, beziehen sich die folgenden Aufgaben auf Fourierreihen der Gestalt
   $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\,.$$

7. Zeigen Sie: Bei einer π-periodischen Funktion verschwinden die Fourierkoeffizienten mit ungeraden Indizes.

8. Seien f und $\widetilde{f}$ 2π-periodisch. In welchem Zusammenhang stehen die Fourierkoeffizienten a_n, b_n von f und $\widetilde{a}_n$, $\widetilde{b}_n$ von $\widetilde{f}$, wenn gilt
   (a) $\widetilde{f}(x) = f(-x)\,,$ (b) $\widetilde{f}(x) = f(x+h)\quad (h = \text{const})\,?$

9. Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Fourierreihe:
   (a) $f(x) = |\cos x|\,,$ (b) $f(x) = \begin{cases} \pi + x & : \; -\pi \le x \le 0\,, \\ \pi - x & : \; 0 < x < \pi\,, \end{cases}$ (2π-periodisch).

Kapitel 2

Funktionalanalytische Grundlagen

2.1 Der Begriff des metrischen Raumes. Topologische Grundbegriffe

Definition 2.1 *Ein (geordnetes Paar)* $(\mathbf{X}, d)$ *aus einer nichtleeren Menge* $\mathbf{X}$ *und einer Abbildung* $d : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *nennt man* **metrischen Raum**, *wenn folgende Axiome erfüllt sind:*

(M1) $d(x,y) \geq 0 \; \forall \, x, y \in \mathbf{X}$ *und* $d(x,y) = 0 \iff x = y$,

(M2) $d(x,y) = d(y,x) \; \forall \, x, y \in \mathbf{X}$,

(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \; \forall \, x, y, z \in \mathbf{X}$.

Die Elemente $x, y, z, \ldots$ *von* $\mathbf{X}$ *heißen* **Punkte** *des metrischen Raumes* (X, d) , *die Abbildung* $d : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ **Abstand** *oder* **Metrik** *auf* $\mathbf{X}$.

Beispiel 2.2

1. $(\mathbb{R}, d)$ *oder* $(\mathbb{C}, d)$ *mit* $d(x,y) = |x - y|$.

2. $(\mathbb{R}^n, d_2)$ *oder* $(\mathbb{C}^n, d_2)$ *mit* $d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^2}$, *wobei*

$$x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \end{bmatrix}^T \quad \textit{und} \quad y = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{bmatrix}^T .$$

3. $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ *oder* $(\mathbb{C}^n, d_\infty)$ *mit* $d_\infty(x,y) = \max \{ |\xi_k - \eta_k| : k = 1, \ldots, n \}$.

4. $(\mathbf{X}, d_H)$, *wobei* $\mathbf{X}$ *die Menge der* n*-stelligen Binärwörter* $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \{0,1\}^n$ *und* $d_H(x,y)$ *den sog.* HAMMING-*Abstand bezeichen,*

$$d_H(x,y) = \text{Anzahl der Stellen, in denen sich } x \text{ und } y \text{ unterscheiden} .$$

Definition 2.3 *Es sei* $(\mathbf{X}, d)$ *ein metrischer Raum.*

1. *Für* $x \in \mathbf{X}$ *und* $\varepsilon > 0$ *nennt man die Menge* $U_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbf{X} : d(x,y) < \varepsilon\}$ ε-**Umgebung** *des Punktes* x *oder* **offene Kugel** *mit dem Radius* ε *um den Mittelpunkt* x.

2. $K_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbf{X} : d(x,y) \leq \varepsilon\}$ *heißt* **abgeschlossene Kugel**.

3. *Eine Menge* $U \subset \mathbf{X}$ *nennt man* **Umgebung** *des Punktes* $x \in \mathbf{X}$, *wenn ein* $\varepsilon > 0$ *existiert, so dass* $U_\varepsilon(x) \subset U$ *gilt.*

4. *Ein Punkt* $x \in \mathbf{X}$ *heißt* **innerer Punkt** *der Menge* $A \subset \mathbf{X}$, *wenn* A *eine Umgebung von* x *ist.*

5. *Ein Punkt* $x \in \mathbf{X}$ *heißt* **Häufungspunkt** *der Menge* A, *wenn in jeder* ε*-Umgebung von* x *unendlich viele Punkte der Menge* A *liegen. Die Menge* A' *aller Häufungspunkte von* A *nennt man* **Ableitung** *der Menge* A. *Die Menge* $\overline{A} := A \cup A'$ *heißt* **abgeschlossene Hülle** *der Menge* A. *Die Menge* $B \subset \mathbf{X}$ *nennt man* **dicht** *in* A, *wenn* $\overline{B} \supset A$ *gilt.*

6. *Die Menge* $A \subset \mathbf{X}$ *heißt* **beschränkt**, *wenn ein* $x_0 \in \mathbf{X}$ *und ein* $r > 0$ *existieren, so dass* $A \subset K_r(x_0)$ *gilt.*

7. *Die Menge* $A \subset \mathbf{X}$ *heißt* **offen**, *wenn* A *Umgebung jedes Punktes* $x \in A$ *ist, d.h., wenn* A *nur aus inneren Punkten besteht.*

8. *Die Menge* $A \subset \mathbf{X}$ *nennt man* **abgeschlossen**, *wenn* $\mathbf{X} \setminus A$ *offen ist. Die leere Menge* $\emptyset$ *ist offen, der ganze Raum* $\mathbf{X}$ *ist abgeschlossen.*

Folgerung 2.4

1. *Da* $\mathbf{X}$ *auch offen ist, ist die leere Menge auch abgeschlossen.*

2. *Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen, die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen, der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

3. *Der Punkt* x *ist genau dann Häufungspunkt von* A, *wenn für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $x_\varepsilon \in (A \setminus \{x\}) \cap U_\varepsilon(x)$ *existiert. Die Menge* A' *ist stets abgeschlossen.*

4. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

   (a) A *ist abgeschlossen.*

   (b) $A' \subset A$.

   (c) $\overline{A} = A$.

2.2 Konvergente Punktfolgen

Es sei $(\mathbf{X}, d)$ ein metrischer Raum. Wir betrachten eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ von Punkten $x_n \in \mathbf{X}$, $n = 1, 2, \ldots$, des metrischen Raumes $\mathbf{X}$.

Definition 2.5

1. *Der Punkt $x^* \in \mathbf{X}$ heißt* **Grenzwert** *der Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, wenn*

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x^*) = 0$$

gilt, d.h., wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $N = N(\varepsilon)$ existiert, so dass $d(x_n, x^*) < \varepsilon$ für alle $n > N$ erfüllt ist.

2. *Die Punktfolge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nennt man* **konvergent***, wenn sie einen Grenzwert hat.*

3. *Die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nennt man* **Cauchyfolge** *oder* **Fundamentalfolge***, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $N = N(\varepsilon)$ existiert, so dass $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $m, n > N$ gilt.*

Folgerung 2.6

1. *Ist eine Punktfolge konvergent, so ist ihr Grenzwert eindeutig bestimmt.*

2. *Jede konvergente Folge ist Cauchyfolge.*

3. *Jede Cauchyfolge ist beschränkt.*

Definition 2.7 *Ein metrischer Raum $(\mathbf{X}, d)$ heißt* **vollständig***, wenn jede Cauchyfolge in $\mathbf{X}$ konvergent ist.*

Beispiel 2.8 *Die metrischen Räume $(\mathbb{R}^n, d_2)$, $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$, $(\mathbb{C}^n, d_2)$, $(\mathbb{C}^n, d_\infty)$ sind vollständig.*

2.3 Stetige Abbildungen. Kompakte Mengen

Definition 2.9 *Es seien $(\mathbf{X}, d_\mathbf{X})$ und $(\mathbf{Y}, d_\mathbf{Y})$ metrische Räume. Eine Abbildung $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$, $x \mapsto f(x)$ heißt* **stetig** *im Punkt $x_0 \in \mathbf{X}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass*

$$d_\mathbf{Y}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \forall\, x \in U_\delta(x_0)$$

gilt. Sie heißt stetig auf $\mathbf{X}$, wenn sie in jedem Punkt von $\mathbf{X}$ stetig ist.

Satz 2.10 (Stetigkeit mittelbarer Funktionen) *Die Abbildungen $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ und $g : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Z}$ seien in $x_0 \in \mathbf{X}$ bzw. $y_0 = f(x_0)$ stetig. Dann ist die Abbildung $g \circ f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Z}$, $x \mapsto g(f(x))$ im Punkt x_0 stetig.*

Satz 2.11 (Folgenstetigkeit) *Eine Abbildung $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ ist genau dann im Punkt $x^* \in \mathbf{X}$ stetig, wenn aus $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{X}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ stets $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x^*)$ folgt.*

Definition 2.12 *Eine Teilmenge* $K \subset \mathbf{X}$ *eines metrischen Raumes* $(\mathbf{X}, d)$ *nennt man* **kompakt**, *wenn jede Punktfolge* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset K$ *eine in* K *konvergente Teilfolge besitzt.*

Folgerung 2.13

1. *Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen und beschränkt.*
2. *Jede abgeschlossene und beschränkte Menge im* $(\mathbb{R}^n, d_2)$ $((\mathbb{R}^n, d_\infty)\,, (\mathbb{C}^n, d_2)\,, (\mathbb{C}^n, d_\infty))$ *ist kompakt.*

Definition 2.14 *Es seien* $(\mathbf{X}, d)$ *ein metrischer Raum,* $A \subset \mathbf{X}$ *und* $x_0 \in \mathbf{X}$. *Dann nennt man die Zahl*

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf \{d(x, a) : a \in A\}$$

den **Abstand des Punktes** x_0 **von der Menge** A,.

Satz 2.15 (beste Approximation) *Es seien* $(\mathbf{X}, d)$ *ein metrischer Raum und* $K \subset \mathbf{X}$ *eine kompakte Teilmenge. Dann existiert zu jedem Punkt* $x_0 \in \mathbf{X}$ *ein Punkt* $x_0^* \in K$, *der unter allen Punkten von* K *den kleinsten Abstand zu* x_0 *hat. Mit anderen Worten:* $\forall\, x_0 \in \mathbf{X}\ \exists\, x_0^* \in K : d(x_0, x_0^*) = \operatorname{dist}(x_0, K)$.

Satz 2.16 (stetige Abbildungen auf kompakten Mengen) *Es seien* $(\mathbf{X}, d)$ *ein kompakter metrischer Raum und* $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine stetige Abbildung. Dann nimmt* $f(x)$ *auf* $\mathbf{X}$ *den kleinsten und größten Funktionswert an, d.h., es existieren* $x_*, x^* \in \mathbf{X}$, *so dass*

$$f(x_*) \le f(x) \le f(x^*) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}\,.$$

Satz 2.17 (gleichmäßige Stetigkeit) *Es seien* $(\mathbf{X}, d_{\mathbf{X}})$ *ein kompakter metrischer Raum und* $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ *stetig. Dann ist* f *auf* $\mathbf{X}$ *gleichmäßig stetig, d.h.*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : d_{\mathbf{Y}}(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon\ \forall\, x_1, x_2 \in \mathbf{X} \text{ mit } d_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) < \delta\,.$$

2.4 Die Methode der sukzessiven Approximation. Der Banachsche Fixpunktsatz

Man nennt die Abbildung $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ **kontrahierend**, wenn ein $q \in (0, 1)$ existiert, so dass

$$d_{\mathbf{Y}}(f(x_1), f(x_2)) \le q\, d_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbf{X}$ gilt (vgl. Abschnitt 0.5.5 mit Satz 0.38).

Satz 2.18 (Banachscher Fixpunktsatz) *Es seien* $(\mathbf{X}, d)$ *ein vollständiger metrischer Raum und* $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ *eine kontrahierende Abbildung mit der Kontraktionskonstanten* $q \in (0, 1)$. *Dann besitzt* f *in* $\mathbf{X}$ *genau einen Fixpunkt* x^*, *d.h.* $f(x^*) = x^*$, *wobei die Folge* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *der sukzessiven Approximationen* $x_n = f(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, *für jeden Startpunkt* $x_0 \in \mathbf{X}$ *gegen* x^* *konvergiert. Dabei gilt die (a priori) Fehlerabschätzung*

$$d(x_n, x^*) \le \frac{q^n}{1 - q}\, d(x_1, x_0)\,.$$

2.5 Normierte Räume

Definition 2.19 *Ein geordnetes Paar* $(\mathbf{V}, \|.\|)$ *aus einem* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* $\mathbf{V}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{K} = \mathbb{C})$ *und einer Abbildung* $\|.\| : V \longrightarrow \mathbb{K}\,,\ x \mapsto \|x\|$ *heißt* **normierter Raum** *(über* $\mathbb{K}$*), wenn die folgende Axiome erfüllt sind:*

(N1) $\|x\| \geq 0\ \forall\, x, y \in \mathbf{V}$ *und* $\|x\| = 0 \iff x = \Theta\,.$

(N2) $\|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\|\ \forall\, x \in \mathbf{V}\,,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}\,.$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\ \forall\, x, y \in \mathbf{V}\,.$

Beispiel 2.20

1. $\mathbf{V} = \mathbb{K}^n\,,\ x = \begin{bmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_n \end{bmatrix}^T,\ \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}\,,\ 1 \leq p < \infty\,.$

2. $\mathbf{V} = \mathbb{K}^n\,,\ x = \begin{bmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_n \end{bmatrix}^T,\ \|x\|_\infty = \max\left\{|\xi_k| : k = 1, \ldots, n\right\}\,.$

3. *Es sei* $(\mathbf{X}, d)$ *ein metrischer Raum. Mit* $C_B(\mathbf{X})$ *bezeichnen wir die Menge aller beschränkten stetigen Funktionen* $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{C}\,.$ *Dann ist* $(C_B(\mathbf{X}), \|.\|_\infty)$ *mit*

$$\|f\|_\infty = \sup\left\{|f(x)| : x \in \mathbf{X}\right\}$$

ein normierter Raum. Die algebraischen Operationen sind dabei für Funktionen f, g *und Skalare* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *durch*

$$(\alpha\, f + \beta\, g)(x) = \alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\,, \quad x \in \mathbf{X}\,,$$

erklärt.

Folgerung 2.21 *Ist* $(\mathbf{V}, \|.\|)$ *ein normierter Raum, so ist* $(\mathbf{V}, d)$ *mit* $d(x, y) = \|x - y\|$ *ein metrischer Raum. Somit sind normierte Räume spezielle metrische Räume, und alle Definitionen und Aussagen der Abschnitte 2.1-2.4 haben auch in normierten Räumen Gültigkeit.*

Beispiel 2.22 *Der Raum der beschränkten Zahlenfolgen* $\ell^\infty = (\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ *(vgl. Bem. 1.2, 5) mit*

$$\|x\|_\infty = \|(\xi_n)_{n=0}^\infty\|_\infty = \sup\left\{|\xi_n| : n = 0, 1, 2, \ldots\right\}$$

ist ein normierter Raum. Die algebraischen Operationen in ℓ^∞ *sind durch*

$$\alpha\,(\xi_n)_{n=0}^\infty + \beta\,(\eta_n)_{n=0}^\infty = (\alpha\xi_n + \beta\eta_n)_{n=0}^\infty\,, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}\,,$$

erklärt.

Definition 2.23 *Ein normierter Raum heißt* **Banachraum***, wenn der entsprechende metrische Raum (vgl. Folg. 2.21) vollständig ist.*

Beispiel 2.24

1. $\left(\mathbb{K}^n, \|.\|_p\right)$, $1 \le p \le \infty$, *sind Banachräume.*

2. $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ *ist ein Banachraum.*

3. *Die Mengen* c_0 *und* c *(vgl. Def. 1.1) sind abgeschlossene lineare Teilräume von* $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ *und somit auch Banachräume.*

2.6 Räume mit Skalarprodukt. Der Hilbertraum ℓ^2

Es sei $\mathbf{V}$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die Abbildung $\langle .,. \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$, $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$ nennt man ein **Skalarprodukt** oder auch **inneres Produkt**, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(S1) $\langle x,x \rangle \ge 0 \;\; \forall\, x \in \mathbf{V}$ und $\langle x,x \rangle = 0 \iff x = \Theta$.

(S2) $\langle y,x \rangle = \overline{\langle x,y \rangle} \;\; \forall\, x,y \in \mathbf{V}$.

(S3) $\langle \alpha\, x + \beta\, y, z \rangle = \alpha \langle x,z \rangle + \beta \langle y,z \rangle \;\; \forall\, x,y,z \in \mathbf{V}$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Beispiel 2.25

1. $\mathbf{V} = \mathbb{K}^n$, $\langle x,y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta_k}$.

2. $\ell^2 := \left\{ x = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty \right\}$.

   (a) *Es gilt* $\ell^2 \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty$.

   (b) ℓ^2 *ist linearer Teilraum von* c_0 .

   (c) *Durch* $\langle x,y \rangle_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta_k}$, $x, y \in \ell^2$, *wird ein Skalarprodukt auf* ℓ^2 *definiert.*

Satz 2.26 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) *Ist* $(\mathbf{V}, \langle .,. \rangle)$ *ein Raum mit Skalarprodukt, so gilt*

$$| \langle x,y \rangle |^2 \le \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle \quad \forall\, x,y \in \mathbf{V} ,$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn x *und* y *linear abhängig sind.*

Folgerung 2.27 *Ist* $(\mathbf{V}, \langle .,. \rangle)$ *ein Raum mit Skalarprodukt, so ist* $(\mathbf{V}, \|.\|)$ *mit*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$$

ein normierter Raum.

Ein Raum $(\mathbf{V}, \langle .,. \rangle)$ mit Skalarprodukt heißt **unitärer Raum**, wenn $(\mathbf{V}, \|.\|)$ mit $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ein Banachraum ist. Einen unitären Raum nennt man **Hilbertraum**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ ein linear unabhängiges System in $\mathbf{V}$ mit genau n Elementen existiert.

Satz 2.28 *Der Raum $\ell^2 = \left(\ell^2, \langle .,. \rangle_2\right)$ ist ein Hilbertraum.*

Folgerung 2.29 *Es sei $(\mathbf{H}, \langle .,. \rangle)$ ein Hilbertraum.*

1. *Gilt $x_n \longrightarrow x$ und $y_n \longrightarrow y$ in $\mathbf{H}$, so folgt*

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &\le |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, y \rangle| + |\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| \\ &= |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \\ &\le \|x_n\| \, \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \, \|y\| \longrightarrow 0 \,, \end{aligned}$$

   d.h. die Abbildung $\langle .,. \rangle : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ ist stetig.

2. *Ist $\mathbf{L} \subset \mathbf{H}$ ein linearer Teilraum von $\mathbf{H}$, so ist auch*

$$\mathbf{L}^\perp := \{x \in \mathbf{H} : \langle x, y \rangle = 0 \ \forall\, y \in \mathbf{L}\}$$

   ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathbf{H}$. Dabei gilt $\mathbf{L} \cap \mathbf{L}^\perp = \{\Theta\}$.

3. *Es seien $\mathbf{L} \subset \mathbf{H}$ ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathbf{H}$. Dann lässt sich jedes $x \in \mathbf{H}$ auf eindeutige Weise in der Form $x = y + z$ mit $y \in \mathbf{L}$ und $z \in \mathbf{L}^\perp$ darstellen. Dabei gilt*

$$\|x - y\| := \inf\{\|x - w\| : w \in \mathbf{L}\} \,.$$

   Der Vektor y heißt **orthogonale Projektion** *von x auf $\mathbf{L}$. Man schreibt auch $\mathbf{H} = \mathbf{L} \oplus \mathbf{L}^\perp$ und nennt $\mathbf{L}^\perp$ das* **orthogonale Komplement** *zu $\mathbf{L}$.*

4. *Es sei $\mathbf{L} \subset \mathbf{H}$ ein linearer Teilraum. Dann gilt $\overline{\mathbf{L}} = \mathbf{H}$ genau dann wenn* **kein** *$x^* \in \mathbf{H} \setminus \{\Theta\}$ existiert, so dass $\langle x, x^* \rangle = 0$ für alle $x \in \mathbf{L}$ gilt.*

Ein System $B = \{b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots\} = (b_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbf{H}$ heißt **linear unabhängig**, wenn jedes endliche Teilsystem linear unabhängig ist. Das System B nennt man ein **Orthonormalsystem** (ONS), wenn $\langle b_j, b_k \rangle = \delta_{jk}$ für alle $j, k = 0, 1, 2, \ldots$ gilt. Man beachte, dass ein ONS automatisch linear unabhängig ist.

Folgerung 2.30 (Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren) *Es sei $(b_n)_{n=0}^\infty$ ein linear unabhängiges System. Wir setzen*

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\langle b_0, b_0 \rangle}}\, b_0 \,.$$

Dann gilt $\langle a_0, a_0 \rangle = 1$. Wir bestimmen $\beta_{10} \in \mathbb{C}$ so, dass

$$\widetilde{a}_1 = b_1 + \beta_{10} a_0$$

orthogonal zu a_0 *ist, d.h.* $\beta_{10} = -\langle b_1, a_0\rangle$. *Da* $\widetilde{a}_1 \neq \Theta$ *gilt, können wir*

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle \widetilde{a}_1, \widetilde{a}_1\rangle}}\, \widetilde{a}_1$$

setzen. Sind $a_0, \ldots, a_{m-1} \in \operatorname{span}\{b_0, \ldots, b_{m-1}\}$ *so bestimmt, dass*

$$\langle a_j, a_k\rangle = \delta_{jk}\,, \quad j,k = 0,1,\ldots,m-1\,,$$

gilt, so setzen wir

$$\widetilde{a}_m = b_m + \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{mk} a_k \quad \textit{mit} \quad \beta_{mk} = -\langle b_m, a_k\rangle$$

und

$$a_m = \frac{1}{\sqrt{\langle \widetilde{a}_m, \widetilde{a}_m\rangle}}\, \widetilde{a}_m\,.$$

Auf diese Weise erhalten wir ein ONS mit der Eigenschaft

$$\operatorname{span}\{a_0, \ldots, a_n\} = \operatorname{span}\{b_0, \ldots, b_n\}\,, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Folgerung 2.31 *Es seien* $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ *ein ONS in* $\mathbf{H}$,

$$\mathbf{L}_m = \operatorname{span}\{e_0, \ldots, e_m\}\,, \quad m = 0,1,2,\ldots\,,$$

und

$$\mathbf{L} = \overline{\left\{\sum_{k=0}^{m} \alpha_k e_k : \alpha_k \in \mathbb{C},\, m = 0,1,2,\ldots\right\}}\,.$$

Dann ist

$$\sum_{k=0}^{m} \langle x, e_k\rangle\, e_k$$

die **beste Approximation** *an* $x \in \mathbf{H}$ *durch Elemente aus* $\mathbf{L}_m$. *Die Zahlen* $\gamma_k = \langle x, e_k\rangle$ *werden die* **Fourierkoeffizienten** *von* x *bzgl. des ONS* $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *genannt. Dabei gilt die* **Besselsche Ungleichung**

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall\, x \in \mathbf{H}\,.$$

Ist $\mathbf{L} = \mathbf{H}$, *so gilt*

$$\lim_{m\to\infty} \left\| x - \sum_{k=0}^{m} \langle x, e_k\rangle\, e_k \right\| = 0\,, \text{ d.h. } x = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k\rangle\, e_k\,,\ \forall\, x \in \mathbf{H}\,.$$

In diesem Fall gilt die **Parsevalsche Gleichung**

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2 \quad \forall\, x \in \mathbf{H}\,,$$

und man nennt $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ *ein* **vollständiges Orthonormalsystem** *(VONS) in* $\mathbf{H}$ *und die Abbildung* $\mathcal{F} : \mathbf{H} \longrightarrow \ell^2$, $x \mapsto (\langle x, e_n\rangle)_{n=0}^{\infty}$ **Fouriertransformation**, *die wegen der Parsevalschen Gleichung ein* **isometrischer Isomorphismus** *ist.*

Beispiel 2.32 $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ *mit* $e_n = \{\delta_{nk}\}_{k=0}^{\infty}$ *ist VONS in* ℓ^2 .

Beispiel 2.33 *Wir versehen den Raum* $\mathbf{C}[-1,1] = \{f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ *stetig*$\}$ *der stetigen komplexwertigen Funktionen über dem Interval* $[-1,1]$ *mit dem Skalarprodukt*

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Dann ist $(T_n)_{n=0}^{\infty}$ *mit*

$$T_0(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad \textit{und} \quad T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\arccos x)$$

ein ONS in $\mathbf{V} = (\mathbf{C}[-1,1], \langle .,.\rangle)$, *wobei aber* $\mathbf{V}$ **kein** *Hilbertraum ist.*

2.7 Lineare beschränkte Operatoren

Definition 2.34 *Eine lineare Abbildung* $A : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{V}$, $u \mapsto Au$ *zwischen zwei normierten Räumen* $(\mathbf{U}, \|.\|_{\mathbf{U}})$ *und* $(\mathbf{V}, \|.\|_{\mathbf{V}})$ *(über dem Zahlenkörper* $\mathbb{K}$*) heißt* **linearer beschränkter Operator***, wenn*

$$\sup\{\|Au\|_{\mathbf{V}} : u \in \mathbf{U},\ \|u\|_{\mathbf{U}} \le 1\} < \infty \tag{2.1}$$

gilt.

Die Menge aller linearen und beschränkten Operatoren von $\mathbf{U}$ nach $\mathbf{V}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$. Die Zahl in (2.1) bezeichnen wir mit $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathbf{U},\mathbf{V})}$.

Folgerung 2.35 *Es sei* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$.

1. $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathbf{U},\mathbf{V})}$ *ist die kleinste Zahl* M , *für die*

   $$\|Au\|_{\mathbf{V}} \le M\,\|u\|_{\mathbf{U}} \quad \forall\, u \in \mathbf{U}$$

   erfüllt ist.

2. *Es gilt*

   $$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathbf{U},\mathbf{V})} = \sup\{\|Au\|_{\mathbf{V}} : u \in \mathbf{U},\ \|u\|_{\mathbf{U}} = 1\} = \sup\left\{\frac{\|Au\|_{\mathbf{V}}}{\|u\|_{\mathbf{U}}} : u \in \mathbf{U}\setminus\{\Theta\}\right\}.$$

3. *Die Abbildung* $A : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{V}$ *überführt beschränkte Mengen in beschränkte Mengen und ist stetig.*

Beispiel 2.36 $\mathbf{U} = \mathbb{C}^n$ *mit* $\|x\|_\infty = \max\{|\xi_k| : k = 1, \dots, n\}$ *und* $\mathbf{V} = \mathbb{C}^m$ *ebenfalls mit* $\|.\|_\infty$, $A = [\ \alpha_{jk}\ ]_{j=1,k=1}^{m\quad n}$. *Dann gilt*

$$\|A\| = \max\left\{\sum_{k=1}^{n} |\alpha_{jk}| : j = 1, \dots, m\right\} \quad \text{(Zeilensummennorm der Matrix } A\text{)}.$$

Satz 2.37 *Unter Verwendung der linearen Verknüpfungen*

$$(\alpha A + \beta B)u = \alpha Au + \beta Bu\,, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ A, B \in \mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V})\,,$$

wird $\left(\mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V}), \|.\|_{\mathcal{L}(\mathbf{U},\mathbf{V})}\right)$ *ein normierter Raum.*

2.8 Zeitdiskrete Signale

Es sei $x_K : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ ein **kontinuierliches Signal**, welches über die Beziehung

$$x(n) := x_K(nT_A)\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

mit dem **Abtastintervall** $T_A > 0$ abgetastet werde. $f_A = \dfrac{1}{T_A}$ nennt man die **Abtastfrequenz**. Die Zahlenfolge $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, welche wir kurz auch nur mit $\{x(n)\}$ bezeichnen werden, heißt **zeitdiskretes Signal**.

Beispiel 2.38

1. **Impulsfolge**: $\delta_0(n) = \delta_{0n} = \begin{cases} 1 & : \quad n = 0\,, \\ 0 & : \quad n \neq 0\,. \end{cases}$

2. **Sprungfolge**: $h_0(n) = \begin{cases} 1 & : \quad n \geq 0\,, \\ 0 & : \quad n < 0\,. \end{cases}$

3. **reelle kausale Exponentialfolge**: $x(n) = \begin{cases} a^n & : \quad n \geq 0\,, \\ 0 & : \quad n < 0\,, \end{cases} \qquad -1 < a < 1\,.$

4. **komplexe Exponentialfolge**: $x(n) = e^{\mathrm{i}\omega T_A n} = e^{\mathrm{i}\Omega n}$, *wobei* $\Omega = \dfrac{\omega}{f_A} = \omega T_A$ *die auf die Abtastfrequenz* f_A *normierte Kreisfrequenz bezeichnet.*

Die Impulsfolge besitzt die sog. **Ausblendeigenschaft**

$$x(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(j)\,\delta_0(n-j) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta_0(j)\,x(n-j)\,. \tag{2.2}$$

Unter einem **diskreten System** verstehen wir eine Transformation H die einer Erregung $\{x(n)\}$ auf eine bestimmte Art und Weise eine Antwort $\{y(n)\} = H\,\{x(n)\}$ zuordnet,

$$\{x(n)\} \longrightarrow \boxed{H\{\ \}} \longrightarrow \{y(n)\}\,.$$

Ein solches System nennen wir **linear**, wenn

$$H\left\{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j(n)\right\} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j H\,\{x_j(n)\}$$

für beliebige Skalare α_j und Signale $\{x_j(n)\}$ sowie $m \in \mathbb{N}$ gilt. Es heißt **zeitinvariant**, wenn die Systemantwort nicht vom Zeitpunkt der Erregung abhängt, d.h.

$$\{y(n-n_0)\} = H\,\{x(n-n_0)\} \quad \forall\, n_0 \in \mathbb{Z}\,.$$

Ein lineares und zeitinvariantes System wird auch LTI-System genannt (**L**inear-**T**ime-**I**nvariant). Das Signal

$$\{h(n)\} = H\{\delta_0(n)\}$$

wird **Impulsantwort** des Systems H genannt. Wegen der Ausblendeigenschaft (2.2) und der Linearität kann man dann die Systemantwort $\{y(n)\}$ auf die Erregung $\{x(n)\}$ in der Form

$$\{y(n)\} = H\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} x(j)\,\delta_0(n-j)\right\} = \left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} x(j)h(n-j)\right\} =: \{x(n)\} * \{h(n)\}$$

schreiben, d.h.

Ausgangssignal = Faltung des Eingangssignals mit der Impulsantwort.

BIBO-Stabilität: Man nennt ein System H BIBO-stabil (**B**ounded-**I**nput-**B**ounded-**O**utput), wenn

$$\{x(n)\} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) \quad \Longrightarrow \quad H\{x(n)\} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})\,,$$

d.h., wenn $H : \ell^\infty(\mathbb{Z}) \longrightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z})$ eine Abbildung des Raumes der (zweiseitig unendlichen) beschränkten Zahlenfolgen $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ in sich ist.

Satz 2.39 *Ein LTI-System H mit der Impulsantwort $\{h(n)\}$ ist genau dann BIBO-stabil, wenn*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (\text{d.h. } \{h(n)\} \in \ell^1(\mathbb{Z}))$$

gilt.

Kausalität: Man nennt das System H kausal, wenn

die Antwort $y(n)$ unabhängig von $x(n+1), x(n+2), \ldots$

ist. Ist ein LTI-System kausal, so folgt

$$y(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(j)x(n-j) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)x(n-j)\,,$$

d.h. $h(j) = 0$ für alle $j < 0$.

Reellwertige Systeme: Man spricht von reellwertigen Systemen, wenn ein reelles Eingangssignal stets auch ein reelles Ausgangssignal zur Folge hat. Ein LTI-System ist genau dann reellwertig, wenn die Folge der Impulsantwort nur aus reellen Zahlen besteht.

Wir betrachten jetzt ein LTI-System und die Systemantwort auf die Erregung mit der komplexen Exponentialfolge $\left\{e^{\mathbf{i}\Omega n}\right\}$,

$$\{y(n)\} = \{h(n)\} * \left\{e^{\mathbf{i}\Omega n}\right\} = \left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty} h(j)e^{\mathbf{i}\Omega(n-j)}\right\} = \left\{e^{\mathbf{i}\Omega n}\sum_{j=-\infty}^{\infty} h(j)e^{-\mathbf{i}\Omega j}\right\}.$$

Wir sehen, dass diese Systemantwort eine komplexe Exponentialfolge mit der Frequenz des Eingangssignals ist. Lediglich Amplitude und Phase werden beeinflusst. Die Funktion

$$H\left(e^{\mathbf{i}\Omega}\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(j) e^{-\mathbf{i}\Omega j}$$

heißt **Frequenzgang** des Systems mit der Impulsantwort $\{h(n)\}$. Der Frequenzgang ist 2π-periodisch: $H\left(e^{\mathbf{i}(\Omega+2\pi)}\right) = H\left(e^{\mathbf{i}\Omega}\right)$. Ist $h(n) = a^n$, $-1 < a < 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, eine reelle (kausale) Exponentialfolge, so ergibt sich für den Frequenzgang

$$\begin{aligned} H\left(e^{\mathbf{i}\Omega}\right) &= \sum_{j=0}^{\infty} a^j e^{-\mathbf{i}\Omega j} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(a\, e^{-\mathbf{i}\Omega}\right)^j \\ &= \frac{1}{1 - a\, e^{-\mathbf{i}\Omega}} = \frac{1 - a\cos\Omega - \mathbf{i} a \sin\Omega}{1 + a^2 - 2a\cos\Omega}\,, \end{aligned}$$

also für $H\left(e^{\mathbf{i}\Omega}\right) = \left|H\left(e^{\mathbf{i}\Omega}\right)\right| e^{-\mathbf{i}\phi(\Omega)}$

$$\left|H\left(e^{\mathbf{i}\Omega}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\Omega}} \quad (\textbf{Amplitudengang})$$

und

$$\phi(\Omega) = \arctan \frac{a\sin\Omega}{1 - a\cos\Omega}\,. \quad (\textbf{Phasengang})$$

Es gilt

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H\left(e^{\mathbf{i}\Omega}\right) e^{\mathbf{i}\Omega n}\, d\Omega\,,$$

d.h., die $h(n)$ sind die Fourierkoeffizienten von $H\left(e^{\mathbf{i}\Omega}\right)$ bzgl. des VONS $\left\{e^{-\mathbf{i}\Omega n}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ im Hilbertraum $\mathbf{L}^2[-\pi, \pi]$. Ist $\{x(n)\}$ ein diskretes Signal, so nennt man

$$X\left(e^{\mathbf{i}\Omega}\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(j) e^{-\mathbf{i}\Omega j}$$

das **Spektrum** bzw. die **zeitdiskrete Fouriertransformierte** der Folge $\{x(n)\}$. Es gilt

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{\mathbf{i}\Omega}\right) e^{\mathbf{i}\Omega n}\, d\Omega\,.$$

Für die Systemantwort $y(n) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} Y\left(e^{\mathbf{i}\Omega}\right) e^{\mathbf{i}\Omega n}\, d\Omega$ folgt hieraus

$$Y\left(e^{\mathbf{i}\Omega}\right) = X\left(e^{\mathbf{i}\Omega}\right) H\left(e^{\mathbf{i}\Omega}\right)\,. \quad (\textbf{Faltung im Spektralbereich})$$

Für ein kontinuierliches Signal $x_K(t)$ definiert man das Spektrum analog:

$$X_K(\mathbf{i}\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_K(t) e^{-\mathbf{i}\omega t}\, dt := \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} x_K(t) e^{-\mathbf{i}\omega t}\, dt\,, \quad \omega \in \mathbb{R}\,.$$

Es gilt dann
$$x_K(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_K(\mathbf{i}\omega) e^{\mathbf{i}\omega t} \, d\omega \,, \quad t \in \mathbb{R} \,.$$
Es seien $f_A = \dfrac{1}{T}$ die Abtastfrequenz und $x(n) = x_K(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt
$$\begin{aligned}
x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_K(\mathbf{i}\omega) e^{\mathbf{i}\omega T n} \, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{T}+\frac{2\pi}{T}j}^{\frac{\pi}{T}+\frac{2\pi}{T}j} X_K(\mathbf{i}\omega) e^{\mathbf{i}\omega T n} \, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X_K\left(\mathbf{i}\omega + \mathbf{i}\frac{2\pi}{T} j\right) e^{\mathbf{i}\omega T n} \, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-\pi}^{\pi} X_K\left(\mathbf{i}\frac{\Omega + 2\pi j}{T}\right) e^{\mathbf{i}\Omega n} \, d\Omega \,,
\end{aligned}$$
also
$$X\left(e^{\mathbf{i}\Omega}\right) = \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} X_K\left(\mathbf{i}\frac{\Omega + 2\pi j}{T}\right)$$
bzw.
$$X\left(e^{\mathbf{i}\omega T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} X_K\left(\mathbf{i}\left(\omega + \frac{2\pi}{T} j\right)\right) .$$
Hieraus ergibt sich das

Abtasttheorem. *Sollen die Spektren* $X_K(\mathbf{i}\omega)$ *des kontinuierlichen Signals und* $X\left(e^{\mathbf{i}\omega T}\right)$ *des zeitdiskreten Signals für* $|\omega| \le \dfrac{\pi}{T}$ *übereinstimmen, so müssen* $X_K(\mathbf{i}\omega) = 0$ *für* $|\omega| \ge \omega_{\max}$ *mit einem gewissen* $\omega_{\max}$ *und* $\dfrac{2\pi}{T} \ge 2\omega_{\max}$ *erfüllt sein.*

2.9 Übungsaufgaben

1. Sind folgende Abbildungen $d : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto d(x,y)$ Metriken auf $\mathbf{X}$?
   (a) $\mathbf{X} = \mathbb{R}$, $d(x,y) = \sin^2(x-y)$,
   (b) $\mathbf{X} = \mathbb{N}$, $d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{x \cdot y}$,
   (c) $\mathbf{X} = \mathbf{s}$ - Menge aller komplexen Zahlenfolgen,
   $$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|} \,, \quad x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \;,\; y = (\eta_n)_{n=1}^{\infty} \;.$$

2. Von folgenden Mengen $A \subset \mathbb{R}$ bestimme man die Menge der Häufungspunkte A' und die Abschließung $\overline{A}$ bezüglich der Metrik $d(x,y) = |x-y|$:

   (a) $A = \mathbb{N}$, (b) **(HA)** $A = (0,1) \cup (1,2)$, (c) $A = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$,

   (d) **(HA)** $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}, \frac{2n}{n+1} \right\}$, (e) **(HA)** $A = \left\{ \frac{2n-3}{3n+2} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

3. Es sei $(\mathbf{X}, d)$ ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass $(\mathbf{X} \times \mathbf{X}, d_\infty)$ mit $d_\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{d(x_1,y_1), d(x_2,y_2)\}$ eine metrischer Raum und $d : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung sind.

4. Es sei $(\mathbf{V}, \|.\|)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass dann $\|.\| : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ eine stetige Abbildung ist.

5. Man zeige: Die algebraischen Operationen in einem normierten Raum sind stetige Abbildungen, d.h., man zeige, dass aus $x_n \longrightarrow x$ und $y_n \longrightarrow y$ in $(\mathbf{V}, \|.\|)$ und $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ in $(\mathbb{R}, |.|)$ folgt $x_n + y_n \longrightarrow x + y$ und $\lambda_n x_n \longrightarrow \lambda x$ in $\mathbf{V}$.

6. Man zeige, dass $\mathbf{c}$ ein abgeschlossener Teilraum von ℓ^∞ ist.

7. Es seien $(\mathbf{U}, \|.\|_a)$ ein Banachraum und $(\mathbf{U}, \|.\|_b)$ ein normierter Raum. Ferner mögen zwei positive Konstanten c_1, c_2 existieren, so dass $c_1 \|x\|_b \le \|x\|_a \le c_2 \|x\|_b$ für alle $x \in \mathbf{U}$ gilt. (Man sagt, die beiden Normen sind zueinander äquivalent.) Man zeige, dass dann auch $(\mathbf{U}, \|.\|_b)$ ein Banachraum ist.

8. Berechnen Sie die Normen der folgenden Operatoren $A : \mathbf{C}[0,1] \longrightarrow \mathbf{C}[0,1]$, wobei die Norm im Raum der komplexwertigen stetigen Funktionen $\mathbf{C}[0,1]$ definiert sei durch

   $$\|x\| = \|x\|_\infty = \max\{|x(t)| : t \in [0,1]\}.$$

   (a) $(Ax)(t) = \int_0^t x(s)\,ds$, (b) **(HA)** $(Ax)(t) = t\,x(t)$, (c) $(Ax)(t) = t^2 x(0)$.

9. Man zeige, dass ein linearer Operator $A : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{V}$ zwischen zwei normierten Räumen $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$ genau dann eine stetige Abbildung realisiert, wenn er beschränkt ist.

10. **(HA)** Auf $[-1,1]$ definieren wir die Funktionen $U_n(x)$, $n = 0,1,2,\ldots$, durch

    $$U_n(\cos s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin(n+1)s}{\sin s}.$$

    Man zeige, dass $U_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades ist (das n-te Tschebyscheff-Polynom zweiter Art, vgl. Abschnitt 0.12, Aufgabe 11) und dass $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ ein Orthonormalsystem bezüglich des Skalarproduktes $\langle u, v \rangle = \int_{-1}^{1} u(x)\overline{v(x)}\sqrt{1-x^2}\,dx$ ist.

11. Den Raum ℓ^1 der absolut summierbaren Zahlenfolgen $x = (\xi_n)_{n=0}^{\infty}$ versehen wir mit der Norm $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|$. Zeigen Sie, dass $(\ell^1, \|.\|_1)$ ein Banachraum ist.

Kapitel 3

Funktionentheorie

3.1 Einführung

Funktionentheorie steht für die Theorie der komplexwertigen analytischen (oder holomorphen) Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Im weiteren werden wir (falls nichts anderes gesagt wird) stets davon ausgehen, dass $f : G \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $G \subset \mathbb{C}$ definiert ist. Man nennt f im Punkt $z_0 \in G$ (komplex) **differenzierbar**, wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert, d.h., wenn eine Zahl $A =: f'(z_0) \in \mathbb{C}$ existiert, so dass

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(z) - f(z_0) - A(z - z_0)| < \varepsilon |z - z_0| \;\forall\, z \in U_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\,.$$

Folgerung 3.1 *Die Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ ist genau dann in $z_0 \in G$ differenzierbar, wenn eine in z_0 stetige Funktion $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ existiert, so dass*

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) g(z)\,, \quad z \in G\,,$$

gilt.

Ist f in jedem Punkt $z_0 \in G$ differenzierbar, so nennt man f auf G **holomorph**. Eine Funktion f heißt **im Punkt** z_0 **holomorph**, wenn sie in einer Umgebung von z_0 holomorph ist.

Bemerkung 3.2 *Es gelten die üblichen Regeln für das Bilden der Ableitungen von Linearkombinationen, Produkten und Quotienten von Funktionen sowie von verketteten Funktionen.*

Beispiel 3.3 *Für ein Polynom*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad \textit{mit} \quad a_k \in \mathbb{C}$$

ist also

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{n} k a_k z^{k-1}\,.$$

Wir erinnern daran, dass die Summenfunktion einer Potenzreihe im Konvergenzkreis differenzierbar ist und ihre Ableitung durch gliedweise Differentiation berechnet werden kann (Satz 1.41):

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}\,.$$

Folgerung 3.4 *Die Exponentialfunktion*

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ist auf ganz $\mathbb{C}$ *holomorph. Solche Funktionen nennt man* **ganze Funktionen**. *Es gilt*

$$f'(z) = (e^z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z\,.$$

Die trigonometrischen Funktionen

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2\mathbf{i}}\left(e^{\mathbf{i}z} - e^{-\mathbf{i}z}\right)$$

und

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2}\left(e^{\mathbf{i}z} + e^{-\mathbf{i}z}\right)$$

sind ebenfalls ganze Funktionen und es gilt

$$(\sin z)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cos z\,,$$

$$(\cos z)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin z\,.$$

Jede Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ können wir auch als Abbildung $f : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auffassen, indem wir $z = x + \mathbf{i}y$ und $f(x,y) = f(x+\mathbf{i}y) = u(x,y) + \mathbf{i}v(x,y)$ mit $u, v : G \to \mathbb{R}$ schreiben. Ist nun f in z_0 (komplex) differenzierbar, so folgt mit $h = h_1 + \mathbf{i}h_2$

$$f(z_0+h) = f(z_0) + f'(z_0)\,h + |h|\,g_0(z_0,h)$$

mit $\lim_{h\to 0} g_0(z_0,h) = 0$. Das bedeutet

$$\begin{bmatrix} u(x_0+h_1, y_0+h_2) \\ v(x_0+h_1, y_0+h_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(x_0,y_0) \\ v(x_0,y_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + |h| \begin{bmatrix} g_1(z_0,h) \\ g_2(z_0,h) \end{bmatrix}$$

mit $a = \mathsf{Re}\, f'(z_0)$, $b = \mathsf{Im}\, f'(z_0)$. Unter Verwendung des Differenzierbarkeitsbegriffes für vektorwertige Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher (vgl. Abschnitt 0.9.4) können wir somit folgende Aussage formulieren.

Lemma 3.5 *Die Funktion $f(z)$ ist genau dann in z_0 (komplex) differenzierbar, wenn die Funktion $\mathbf{f}(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$ in (x_0,y_0) differenzierbar ist und ihre Ableitung die Gestalt*

$$\mathbf{f}'(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad mit \quad a,b \in \mathbb{R}$$

hat. Dabei gelten die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen**

$$u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)\,, \quad u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) \tag{3.1}$$

und $f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + \mathbf{i}v_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) - \mathbf{i}u_y(x_0,y_0)\,.$

Die Ableitung von $\mathbf{f}(x,y)$ in (x_0,y_0) ist nämlich gleich (siehe Abschnitt 0.9.4)

$$\begin{bmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{bmatrix}.$$

Folgerung 3.6 *Ist G zusammenhängend, so ist eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ durch ihren Realteil bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Seien nämlich $f = u + \mathbf{i}v_1$ und $g = u + \mathbf{i}v_2$ auf G holomorph. Dann folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen* (3.1)

$$\frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial x} = \frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial y} = 0 \quad auf \quad G$$

und somit $v_2 - v_1 = \text{const}$ *auf* G.

Folgerung 3.7 *Lokal (d.h. in einer kleinen Umgebung des Punktes z_0) beschreibt eine in z_0 komplex differenzierbare Funktion $f(z)$ mit $f'(z_0) = r_0 e^{\mathbf{i}\varphi_0} \neq 0$ eine Translation und Drehstreckung oder -stauchung, da*

$$f(z) \approx f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$$

mit

$$f'(z_0) \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{f}'(x_0,y_0) = r_0 \begin{bmatrix} \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{bmatrix}.$$

Solche Funktionen nennt man **lokal konform**. *(Infinitesimal kleine Figuren werden nicht verformt, sondern nur verschoben, gedreht und gestreckt oder gestaucht.)*

Wir betrachten einen (stückweise) stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ und das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

wobei $\Gamma = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$ auch im weiteren stets als doppelpunktfrei vorausgesetzt sei. Dieses Integral kann man auch in der Form

$$\int_\Gamma [u(x,y) + \mathbf{i}v(x,y)](dx + \mathbf{i}dy) = \int_\Gamma [u(x,y)dx - v(x,y)dy] + \mathbf{i}\int_\Gamma [u(x,y)dx + v(x,y)dy]$$

schreiben. Wir erinnern an den Gaußschen Integralsatz (Satz 0.108): Sind $\Gamma = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$ eine stückweise glatte geschlossene Kurve und Ω das Gebiet, welches von Γ berandet wird (Ω liegt links von Γ), so gilt für stetige Funktionen $P, Q : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit stetigen partiellen Ableitungen $P_y, Q_x : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right] dxdy = \int_\Gamma [Q(x,y)\,dy + P(x,y)\,dx]\ .$$

Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt damit

$$\int_\Gamma [u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy] = -\iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right] dxdy = 0$$

und

$$\int_\Gamma [u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx] = \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right] dxdy = 0\,.$$

Satz 3.8 (Cauchyscher Integralsatz) *Ist f in dem einfach zusammenhängenden Gebiet G holomorph, so gilt für jede stückweise glatte und geschlossene Kurve Γ in G*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0\,.$$

Folgerung 3.9 *Ist f in einer Umgebung des Kreisringes $\{z \in \mathbb{C} : r \le |z - z_0| \le R\}$, $0 < r < R$, holomorph, so gilt*

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)dz = \int_{|z-z_0|=R} f(z)dz\,.$$

Ist f in einer Umgebung des Kreises $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le R\}$ holomorph, so gilt

$$\int_{|z-z_0|=R} f(z)dz = 0\,.$$

3.2 Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz

Im weiteren sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend.

1. Es seien $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und Γ eine einfach geschlossene, stückweise glatte Kurve in G. Es liege z_0 im Innern von Γ. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $\overline{U_\varepsilon}(z_0)$ ganz im Inneren von Γ liegt. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt

$$\left(\int_\Gamma - \int_{|z-z_0|=\varepsilon}\right) \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 0\,,$$

also

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz\,.$$

Da dies für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ gilt, folgt

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{|z-z_0|=\varepsilon}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz + \frac{f(z_0)}{2\pi\mathbf{i}}\int_{|z-z_0|=\varepsilon}\frac{dz}{z-z_0}\,.$$

Wegen

$$\int_{|z-z_0|=\varepsilon}\frac{dz}{z-z_0} = \left|\begin{array}{c} z=\varepsilon e^{\mathbf{i}t}+z_0 \\ dz=\mathbf{i}\varepsilon e^{\mathbf{i}t}\,dt\end{array}\right| = \mathbf{i}\int_0^{2\pi} dt = 2\pi\mathbf{i}$$

ergibt sich die **Cauchysche Integralformel**

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\,. \tag{3.2}$$

Liegt dagegen z_0 außerhalb von Γ, so ist

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 0\,,$$

da in diesem Fall der Integrand holomorph innerhalb und in einer Umgebung von Γ ist.

2. Aus (3.2) folgt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \left|\begin{array}{c} z=re^{\mathbf{i}t}+z_0 \\ dz=\mathbf{i}re^{\mathbf{i}t}\,dt\end{array}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{\mathbf{i}t}\right)dt\,.$$

Folgerung 3.10 (Mittelwertsatz) *Sind $f: G\to\mathbb{R}$ holomorph und $\overline{U_r}(z_0)\subset G$, so ist $f(z_0)$ der Mittelwert der Funktionswerte von f auf $\{|z-z_0|=r\}$, d.h.*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{\mathbf{i}t}\right)dt\,.$$

3. (**Potenzreihenentwicklung**) Es seien $f: G\to\mathbb{C}$ holomorph und $\overline{U_r}(z_0)\subset G$. Aus (3.2) folgt für alle $z\in U_r(z_0)$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f(\zeta}{\zeta-z_0}\,\frac{d\zeta}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} \\ &= \frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\int_{|\zeta-z_0|=r}\frac{f(\zeta}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n d\zeta\,. \end{aligned}$$

Es folgt

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n(z-z_0)^n \tag{3.3}$$

mit (**Cauchysche Koeffizientenformel**)

$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \,. \tag{3.4}$$

Formel (3.4) gilt für alle $r > 0$, für die $\overline{U_r}(z_0) \subset G$ gilt, und die Potenzreihe (3.3) konvergiert somit auf jeder offenen Kreisscheibe $U_\rho(z_0)$, die ganz in G liegt.

4. (**Satz von Goursat**) Aus den vorangegangenen Überlegungen folgt, dass jede holomorphe Funktion beliebig oft differenzierbar ist und

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathbf{i}} \int_{|z - z_0| = r} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \tag{3.5}$$

gilt, wenn nur $\overline{U_r}(z_0) \subset G$ (Holomorphiegebiet von f) erfüllt ist.

5. (**Satz von Liouville**) Seien $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $\overline{U_r}(z_0) \subset G$, $|f(z)| \le M$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| = r$ und $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ die Potenzreihenentwicklung von f im Punkt z_0. Dann gilt wegen (3.4)

$$|c_n| \le \frac{M}{r^n} \,, \tag{3.6}$$

weil

$$\left| \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| \le \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r \,.$$

Hieraus folgt, dass jede beschränkte ganze Funktion konstant ist.

6. (**Satz von Morera**) Seien $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$$

für jede Dreieckskurve $\Gamma \subset G$. Dann ist f in G holomorph.

Beweis. Wir zeigen, dass f in jedem Punkt $z_0 \in G$ holomorph ist. Seien $U_g(z_0) \subset G$ und $\zeta_0, \zeta \in U_g(z_0)$. Wir definieren

$$F(\zeta) = \int_{\Gamma_{z_0 \to \zeta}} f(z)\, dz$$

mit $\Gamma_{z_0 \to \zeta}(t) = \{t(\zeta - z_0) + z_0 : 0 \le t \le 1\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{F(\zeta) - F(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} &= \frac{1}{\zeta - \zeta_0} \left(\int_{\Gamma_{z_0 \to \zeta}} f(z)\, dz - \int_{\Gamma_{z_0 \to \zeta_0}} f(z)\, dz \right) \\ &= \frac{1}{\zeta - \zeta_0} \int_{\Gamma_{\zeta_0 \to \zeta}} f(z)\, dz = \int_0^1 f\Big(t(\zeta - \zeta_0) + \zeta_0\Big)\, dt \longrightarrow f(\zeta_0) \end{aligned}$$

für $\zeta \longrightarrow \zeta_0$, also $F'(\zeta_0) = f(\zeta_0)$. $\square$

7. (**Schwarzsches Spiegelungsprinzip**) Es seien $G \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$, $f : G \cup (a,b) \to \mathbb{C}$ stetig, $[a,b] = \overline{G} \cap \mathbb{R}$, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $f(x) \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in (a,b)$. Dann ist $\widetilde{f} : \widetilde{G} \to \mathbb{C}$ holomorph, wobei
$$\widetilde{G} := (a,b) \cup G \cup \{z \in \mathbb{C} : \overline{z} \in G\}$$
und
$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & : \quad z \in G \cup (a,b)\,, \\ \overline{f(\overline{z})} & : \quad z \in \{z \in \mathbb{C} : \overline{z} \in G\}\,. \end{cases}$$

Beweis. Für $z_0, z \in \left\{\zeta \in \mathbb{C} : \overline{\zeta} \in G\right\}$ gilt
$$\lim_{z \to z_0} \frac{\overline{f(\overline{z})} - \overline{f(\overline{z_0})}}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \overline{\left(\frac{f(\overline{z}) - f(\overline{z_0})}{\overline{z} - \overline{z_0}} \right)} = \overline{f'(\overline{z_0})}\,.$$
Um zu zeigen, dass $\widetilde{f}$ auch auf (a,b) holomorph ist, verwenden wir den Satz von Morera. Ein Dreieck, welches (a,b) schneidet zerlegen wir in drei Teildreicke. Aus Stetigkeitsbetrachtungen folgt, dass die Integrale über $\widetilde{f}(z)$ entlang dieser Dreiecke verschwinden. □

3.3 Nullstellen holomorpher Funktionen und der Identitätssatz

Man kann folgendes zeigen: Eine in z_0 holomorphe Funktion mit $f'(z_0) \neq 0$ ist in z_0 **lokal biholomorph**, d.h., es existieren offene Umgebungen U von z_0 und V von $w_0 := f(z_0)$, so dass $f : U \longrightarrow V$ bijektiv ist, die Umkehrfunktion $f^{-1} : V \longrightarrow U$ ebenfalls holomorph ist und $(f^{-1})'(w) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(w))}$ gilt. Hieraus ergeben sich einige Folgerungen:

1. Die Funktionen $p_k(z) = z^k$, $k = 1, 2, \ldots$, sind in jedem Punkt $z_0 \neq 0$ biholomorph.

2. Sind $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $k \in \mathbb{N}$ und $g(z_0) \neq 0$ für ein $z_0 \in G$, so existieren eine Umgebumg U von z_0 und eine holomorphe Funktion $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z) = [h(z)]^k$ $\forall\, z \in U$.

   Beweis. Es sei $\widetilde{z}$ eine k-te Wurzel von $w_0 = g(z_0)$, d.h. $\widetilde{z}^k = w_0$. Aus $\widetilde{z} \neq 0$ und 1. folgt die Existenz einer Umgebung $\widetilde{U}$ von $\widetilde{z}$ und einer Umgebung V von w_0 , so dass $p_k : \widetilde{U} \longrightarrow V$ biholomorph ist. Sei $\widetilde{h} : V \longrightarrow \widetilde{U}$ die entsprechende Umkehrfunktion. D.h., es gilt $[\widetilde{h}(w)]^k = w$. Da g stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass $g(z) \in V\ \forall\, z \in U_\delta(z^0)$. Für $h(z) = \widetilde{h}(g(z))$ und $U = U_\delta(z_0)$ folgt dann $[h(z)]^k = [\widetilde{h}(g(z))]^k = g(z) \ \ \forall\, z \in U$. □

3. Ein $z_0 \in G$ heißt **Nullstelle k-ter Ordnung** der holomorphen Funktion $f : G \to \mathbb{C}$, wenn
$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0\,,\ f^{(k)}(z_0) \neq 0\,.$$
   Dann gilt
$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - z_0)^k\,, \quad z \in U_\rho(z_0)\,,$$

also

$$f(z) = (z - z_0)^k \left[c_k + \sum_{n=1}^{\infty} c_{k+n}(z - z_0)^n \right] =: (z - z_0)^k g(z)$$

mit der holomorphen Funktion $g : U_\rho(z_0) \to \mathbb{C}$ und $g(z_0) = c_k \neq 0$. Nach 2. existiert eine holomorphe Funktion $h : U_\delta(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $[h(z)]^k = g(z)$, woraus mit $\widetilde{f}(z) = (z - z_0)h(z)$ die Beziehung

$$f(z) = [\widetilde{f}(z)]^k ,$$

folgt, wobei $\widetilde{f} : U_\delta(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph und z_0 einfache Nullstelle von $\widetilde{f}(z)$ ist.

Satz 3.11 *Ist z_0 eine k-fache, $k \geq 1$, Nullstelle der holomorphen Funktion f, so existieren eine Umgebung U von z_0 und eine holomorphe Funktion $\widetilde{f} : U \longrightarrow \mathbb{C}$ mit der einfachen Nullstelle z_0, so dass $f(z) = [\widetilde{f}(z)]^k$, $z \in U$.*

4. Wir verwenden die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Satz 3.11. Dann ist also $\widetilde{f} : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $\widetilde{f}(z_0) = 0$, $\widetilde{f}'(z_0) \neq 0$ und $f(z) = [\widetilde{f}(z)]^k \; \forall\, z \in U$. Nach 1. existieren Umgebungen U_0 von z_0 und V von 0, so dass $\widetilde{f} : U_0 \longrightarrow V$ biholomorph ist. Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $U_\delta(0) \subset V$ mit $\delta = \sqrt[k]{\varepsilon}$. Mit $\widetilde{U}$ bezeichnen wir das vollständige Urbild von $U_\delta(0)$ bezüglich $\widetilde{f}$, d.h. $\widetilde{U} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \widetilde{f}(z) \in U_\delta(0) \right\}$. Da $\widetilde{f}$ stetig ist, ist $\widetilde{U}$ eine offene Menge. Ferner gilt $z_0 \in \widetilde{U}$. Die Funktion $p_k(z) = z^k$ bildet $U_\delta(0)$ auf $U_\varepsilon(0)$ ab. Dabei wird jeder Wert $w \in U_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ genau k-mal angenommen. Es folgt, dass $f = \widetilde{f}^k$ die Umgebung $\widetilde{U}$ von z_0 auf $U_\varepsilon(0)$ abbildet und dabei jeden Wert $w \in U_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ genau k-mal annimmt. Insbesondere sind Nullstellen endlicher Vielfachheit isoliert.

Satz 3.12 (Blätterzahl bei einer Nullstelle) *Es sei z_0 eine k-fache Nullstelle der holomorphen Funktion f. Dann existiert für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $\widetilde{U} = \widetilde{U}_\varepsilon$ von z_0, so dass f auf $\widetilde{U}$ jeden Wert $w \in U_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ genau k-mal annimmmt und $f(z) = 0$ nur bei $z = z_0$ gilt.*

5. Es sei jetzt G ein Gebiet, d.h. $G \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Ferner seien $E \subset G$ und $z_0 \in G$ ein Häufungspunkt von E sowie $f, g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $f(z) = g(z)$ $\forall\, z \in E$. Wir setzen $h(z) = f(z) - g(z)$. Dann ist $h : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $h(z) = 0$ $\forall\, z \in E$ und $z = z_0$. Aus 4. folgt, dass z_0 eine Nullstelle unendlicher Vielfachheit von h ist, d.h. $h^{(k)}(z_0) = 0 \; \forall\, k = 0, 1, 2, \ldots$ Daraus folgt $h(z) = 0 \; \forall\, z \in U_\rho(z_0)$. Es sei $G_u \subset G$ die Menge der Nullstellen unendlicher Vielfachheit von h. Dann ist G_u ist offen. Sei $\widetilde{z} \in G \setminus G_u$. Ist $h(\widetilde{z}) \neq 0$, so existiert ein $\widetilde{\rho} > 0$ mit $h(z) \neq 0 \; \forall z \in U_{\widetilde{\rho}}(\widetilde{z})$. Ist $h(\widetilde{z}) = 0$, $\widetilde{z}$ aber Nullstelle endlicher Vielfachheit von h, so existiert nach 4. ein $\widetilde{\rho} > 0$ mit $\widetilde{h}(z) \neq 0 \; \forall\, z \in U_{\widetilde{\rho}}(\widetilde{z}) \setminus \{\widetilde{z}\}$. Somit ist auch $G \setminus G_u$ offen. Da G zusammenhängend und $G_u \neq \emptyset$ sind, ist $G_u = G$.

Satz 3.13 (Identitätssatz) *Sind f und g zwei auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, die auf einer Teilmenge von G mit wenigstens einem Häufungspunkt in G übereinstimmen, so sind sie auf ganz G identisch.*

6. Sei f auf dem Gebiet G holomorph. Dann ist auch $f(G)$ eine zusammenhängende Menge. Seien $w_0 = f(z_0) \in f(G)$ und $f \not\equiv \text{const}$. Dann hat die Funktion $g(z) = f(z) - w_0$ in z_0 eine Nullstelle endlicher Ordnung. Nach 4. existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(w_0) \subset f(G)$, d.h. $f(G)$ ist auch offen.

   Satz 3.14 (Gebietstreue) *Ist $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ auf dem Gebiet G holomorph und nicht konstant, so ist das Bild $f(G)$ auch ein Gebiet.*

7. **Satz 3.15 (Maximumprinzip)** *Ist f auf dem Gebiet G holomorph und nicht konstant, so existiert kein $z_0 \in G$ mit $|f(z)| \le |f(z_0)|\ \forall\, z \in G$. (Also: Ist zusätzlich $f : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, so kann $|f(z)|$ nur auf dem Rand von G sein Maximum annehmen, was natürlich für kompaktes $\overline{G}$ immer der Fall ist.)*

   Beweis. Seien $z_0 \in G$ und $|f(z)| \le |f(z_0)|\ \forall\, z \in G$. Dann ist $f(G) \subset U_R(0)$ mit $R = |f(z_0)|$ und $f(z_0)$ liegt auf Rand von $U_R(0)$. Somit existiert **kein** $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft $U_\varepsilon(f(z_0)) \subset f(G)$ im Widerspruch zum Satz 3.14. □

8. Es seien $f : U_1(0) \longrightarrow U_1(0)$ holomorph und $f(0) = 0$. Dann gilt

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1} = z g(z)$$

   mit der holomorphen Funktion $g : U_1(0) \to \mathbb{C}$. Es folgt $f'(0) = g(0)$. Für $|z| = r < 1$ gilt $|f(z)| = r|g(z)| < 1$, so dass $|g(z)| < \dfrac{1}{r}\ \forall\, z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$. Nach Satz 3.15 ist $|g(z)| < \frac{1}{r}$ $\forall\, z \in \overline{U_r}(0)$. Für $r \longrightarrow 1-0$ erhalten wir $|g(z)| \le 1\ \forall\, z \in U_1(0)$, also $|f(z)| \le |z|$ $\forall\, z \in U_1(0)$. Nehmen wir nun an, dass ein $z_0 \in U_1(0) \setminus \{0\}$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$ existiert, so folgt $|g(z_0)| = 1$ und nach Satz 3.15 $g \equiv \text{const}$ in $U_1(0)$, d.h. $g(z) = e^{\mathbf{i}\vartheta}$ für ein $\vartheta \in \mathbb{R}$. Also ist $f(z) = ze^{\mathbf{i}\vartheta}$. Gleiches folgt, wenn wir $|f'(0)| = 1$ annehmen, da wegen $f'(0) = g(0)$ dann $|g(0)| = 1$ gilt, was nach Satz 3.15 wiederum $g \equiv \text{const}$ impliziert.

   Satz 3.16 (Schwarzsches Lemma) *Seien $f : U_1(0) \longrightarrow U_1(0)$ holomorph und $f(0) = 0$. Dann gilt $|f'(0)| \le 1$ und $|f(z)| \le |z|\ \forall\, z \in U_1(0)$. Existiert ein $z_0 \in U_1(0) \setminus \{0\}$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$ oder ist $|f'(0)| = 1$, so ist f einfach eine Drehung um einen Winkel $\vartheta \in \mathbb{R}$, d.h. $f(z) = ze^{\mathbf{i}\vartheta}\ \forall\, z \in U_1(0)$.*

3.4 Isolierte Singularitäten und der Residuensatz

Ist die Funktion $f(z)$ in $U_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ holomorph, so nennt man z_0 eine **isolierte Singularität** von f. Allgemein gilt folgendes.

Satz 3.17 (Laurentreihenentwicklung) *Ist die Funktion $f(z)$ im Kreisring*

$$K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}\ ,$$

wobei $0 \le r < R$, *holomorph, so gilt*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-z_0)^n}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n}_{\text{Nebenteil}} \quad \forall\, z \in K_{r,R}(z_0)\,. \tag{3.7}$$

Dabei gilt die Formel

$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}\,, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\,,$$

für jedes ρ *mit* $r < \rho < R$. *Ist außerdem* $|f(z)| \le M$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z - z_0| = \rho$, *so folgt*

$$|c_n| \le \frac{M}{\rho^n}\,. \tag{3.8}$$

Die isolierte Singularität z_0 der Funktion $f(z)$ nennt man **hebbar**, wenn eine Zahl $w_0 \in \mathbb{C}$ existiert, so dass $f(z)$ mit $f(z_0) = w_0$ auf $U_R(z_0)$ holomorph ist. Dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn in (3.7) $c_n = 0$ für alle $n < 0$ gilt.

Satz 3.18 (Riemannscher Hebbarkeitssatz) *Ist die Funktion* $f(z)$ *in* $U_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ *holomorph und beschränkt, so ist die isolierte Singularität* z_0 *hebbar.*

Beweis. Man hat $|f(z)| \le M < \infty$ für alle $z \in U_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ und kann in (3.8) für $n < 0$ den Grenzübergang $\rho \longrightarrow 0$ betrachten. □

Die isolierte Singularität z_0 der Funktion $f(z)$ nennt man **Pol der Ordnung** $k > 0$, wenn in (3.7) $c_{-k} \ne 0$ und $c_n = 0$ für alle $n < -k$ gilt. Das ist offenbar genau dann der Fall, wenn eine ganze Zahl $m > 0$ existiert, so dass $(z - z_0)^m f(z)$ in z_0 eine hebbare Singularität hat, dies aber für $m = 0$ nicht gilt. Hat also die Funktion $h(z)$ in z_0 eine Nullstelle der Ordnung k, so hat $f(z) = 1/h(z)$ in z_0 einen Pol der Ornung k. Ist die isolierte Singularität z_0 weder hebbagr noch ein Pol, so nennt man z_0 eine **wesentliche Singularität**.

Satz 3.19 (Casorati-Weierstraß) *Ist* z_0 *eine wesentliche Singularität der holomorphen Funktion* $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, *so ist* $f\,(U_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$ ***dicht*** *in* $\mathbb{C}$ *für jedes* $\varepsilon > 0$ *mit* $U_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \subset G$, *d.h. zu jeder Zahl* $w_0 \in \mathbb{C}$ *existiert eine Folge* $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset U_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w_0$.

Den Koeffizienten c_{-1} in der Laurentreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n\,, \quad z \in K_{0,R}(z_0)\,,$$

nennt man **Residuum** der Funktion $f(z)$ in der isolierten Singularität z_0,

$$\mathrm{res}_{z_0} f := c_{-1} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z)\,dz\,, \quad 0 < \rho < R\,.$$

- Ist z_0 eine hebbare Singularität von $f(z)$, so gilt $\mathrm{res}_{z_0} f = 0$.

- Ist z_0 Polstelle der Ornung k der Funktion $f(z)$, so ist

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \Big[(z-z_0)^k f(z) \Big]_{z=z_0} .$$

Satz 3.20 (Residuensatz) *Es sei $\Gamma \subset G$ eine einfache geschlossene, stückweise glatte Kurve. Die holomorphe Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ habe innerhalb von Γ nur die isolierten Singularitäten $z_1, \dots, z_N$. Dann gilt*

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi \mathbf{i} \sum_{k=1}^N \operatorname{res}_{z_k} f .$$

Eine Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, die bis auf Pole in G holomorph ist, nennt man **meromorph** in G.

Satz 3.21 (Argumentprinzip) *Es seien $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ in dem einfach zusammenhängenden Gebiet G meromorph und $\Gamma \subset G$ eine einfache geschlossene, stückweise glatte Kurve, auf der keine Nullstellen und Pole von f liegen. Mit N und P bezeichenen wir die Zahl der Nullstellen bzw. Pole von $f(z)$ innerhalb von Γ (entsprechend ihrer Ordnung gezählt). Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N - P .$$

3.5 Die Berechnung von Integralen mittels des Residuensatzes

Unter Verwendung des Residuensatzes (Satz 3.20) berechnen wir die folgenden Integrale:

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$

2. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi\, e^{-\alpha}}{2}$, $\alpha > 0$

3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$

4. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^a\, dx}{x(x+1)}$, $0 < a < 1$

Man definiert für $a > 0, b > 0$ die **Betafunktion** als

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx .$$

Es gilt

$$B(a,b) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\, dy = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad a > 0, b > 0 , \tag{3.9}$$

sowie

$$B(a,1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}, \quad 0 < a < 1 . \tag{3.10}$$

3.6 Folgen und Reihen holomorpher Funktionen. Die Gammafunktion

Wir verwenden die gleichen Konvergenzbegriffe wie für Folgen und Reihen reellwertiger Funktionen (vgl. Abschn. 1.3 und 1.4).

Definition 3.22 *Es sei $f_n : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $G \subset \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, eine gegebene Folge von Funktionen.*

1. *Die Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ nennt man* **konvergent im Punkt** *$z_0 \in G$, wenn die Zahlenfolge $(f_n(z_0))_{n=1}^{\infty}$ konvergiert.*

2. *$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt* **punktweise konvergent in** *G, wenn sie in jedem Punkt $z \in G$ konvergiert. Dabei nennt man $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ die Grenzfunktion der Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.*

3. *$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt* **gleichmäßig konvergent in** *G mit der Grenzfunktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass*
$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \forall\, n \ge N\,,\ \forall\, z \in G$$
gilt.

Satz 3.23 *Es sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge holomorpher Funktionen auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, die auf jeder kompakten Teilmenge von G gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann gilt:*

1. *$f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph und*
$$f^{(k)}(z) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z)\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,,$$
gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von G.

2. *Es ist*
$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_\Gamma f_n(z)\,dz$$
für jede stückweise glatte Kurve $\Gamma \subset G$.

Folgerung 3.24 (Übertragung auf Reihen) *Die Funktionen $f_n : G \longrightarrow \mathbb{C}$ seien auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorph, und die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ sei auf jeder kompakten Teilmenge von G gleichmäßig konvergent gegen $s : G \longrightarrow \mathbb{C}$. Dann gilt:*

1. *$s : G \longrightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph und*
$$s^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,,$$
gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von G.

2. Es ist

$$\int_\Gamma s(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Gamma f_n(z)\,dz$$

für jede stückweise glatte Kurve $\Gamma \subset G$.

Im Abschnitt 0.17 haben wir für $x > 0$ die Gammafunktion über die Formel

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

definiert. Mit $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$, $z \in \mathbb{C}$, definieren wir

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt = I_1(z) + I_2(z)$$

mit $I_1(z) = \displaystyle\int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\,dt$ und $I_2(z) = \displaystyle\int_1^\infty e^{-t} t^{z-1}\,dt$.

- Es seien $M \subset \mathbb{C}$ kompakt, $z = x + \mathbf{i}y \in M$ und $t \geq 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \left|e^{-t} t^{z-1}\right| &= \left|e^{-t} e^{(z-1)\ln t}\right| = \left|e^{-t+(x-1)\ln t + \mathbf{i}y \ln t}\right| \\ &= e^{-t} e^{(x-1)\ln t} = e^{-t} t^{x-1} \leq e^{-t} t^{\widetilde{x}-1} \end{aligned}$$

  mit $\widetilde{x} = \max\{\mathsf{Re}\, z : z \in M\}$. Da das Integral $\displaystyle\int_1^\infty e^{-t} t^{\widetilde{x}-1}\,dt$ konvergent ist, konvergiert das Integral $I_2(z)$ gleichmäßig bzgl. $z \in M$.

  Satz 3.25 *Es seien* $G \subset \mathbb{C}$ *ein Gebiet,* $f(t,z)$ *und* $\dfrac{\partial f(t,z)}{\partial z}$ *in* $[a,b] \times G$ *stetig* ($-\infty \leq a < b \leq \infty$)*. Konvergiert das Integral*

$$\int_a^b f(t,z)\,dt$$

  gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge $M \subset G$ *, so ist die Funktion*

$$g(z) := \int_a^b f(t,z)\,dt$$

  holomorph in G *, und es gilt*

$$g'(z) = \int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\,dt\,, \quad z \in G\,.$$

  Somit ist $I_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

- Analog zeigt man, dass $I_1(z)$ in der rechten Halbebene holomorph ist.

- Wir versuchen $I_1(z)$ auf $\{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Im}\, z \leq 0\}$ holomorph fortzusetzen. Für $\mathsf{Re}\, z > 0$ haben wir

$$\begin{aligned} I_1(z) &= \int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\, dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\, t^k t^{z-1}\, dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{k+z-1}\, dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left[\frac{t^{k+z}}{k+z} \right]_0^1 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(z+k)} \,. \end{aligned}$$

Für $k \geq m > R > 0$ und $|z| < R$ ist $\left| \frac{(-1)^k}{k!(z+k)} \right| \leq \frac{1}{k!(m-R)}$. Aus Folgerung 3.24 ergibt sich, dass

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(z+k)}$$

holomorph in $U_R(0)$ ist. Dagegen hat

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{k!(z+k)}$$

die Polstellen $0, -1, \ldots, -m+1$ der Ordnung 1 mit den Residuen $\frac{(-1)^k}{k!}$, $k = 0, \ldots, m-1$. Somit ist die Funktion

$$\Gamma(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(z+k)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt$$

meromorph in $\mathbb{C}$ mit den Polstellen $0, -1, -2, \ldots$ der Ordnung 1, wobei

$$\mathrm{res}_{-k}\Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- Wir wissen bereits, dass $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für $x > 0$ gilt. Aus dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen folgt

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}\,. \tag{3.11}$$

Aus $\Gamma(1) = 1$ folgt $\Gamma(n+1) = n!$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

- Neben der Funktionalgleichung (3.11) erhält man aus den Beziehungen (3.9) und (3.10) auch die Funktionalgleichung

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \tag{3.12}$$

Außerdem gilt auch

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2z) \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \left\{0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, \ldots\right\}. \tag{3.13}$$

Aus $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ und (3.11) erhält man induktiv

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}\,, \quad n = 0,1,2,3,\ldots\,,$$

was sich auch direkt aus der Formel (3.13) ergibt.

- Die Gleichung (3.12) zeigt, dass $\Gamma(z)$ keine Nullstellen besitzt. Da die Punkte $z_k = -k$, $k = 0,1,2,\ldots$, einfache Polstellen von $\Gamma(z)$ sind, ist die Funktion $\frac{1}{\Gamma(z)}$ somit eine ganze Funktion mit den einfachen Nullstellen z_k, $k = 0,1,2,\ldots$

3.7 Übungsaufgaben

1. Man untersuche die Funktionen $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ anhand der Definition auf Differenzierbarkeit!
   (a) $f(z) = 5\mathbf{i}$ (b) $f(z) = z$ (c) $f(z) = \overline{z}$ (d) $f(z) = 3\,\mathsf{Re}\,z$

2. Sind folgende Funktionen differenzierbar? Man berechne gegebenenfalls die Ableitung!
   (a) $f(z) = z\,\overline{z}$ (b) $f(z) = z^2\overline{z}$ (c) $f(z) = \mathsf{Im}\,z$
   (d) $f(z) = e^x(\cos y + \mathbf{i}\sin y)$ $(z = x + \mathbf{i}y)$

3. Für welche Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ sind folgende Funktionen ganze Funktionen? $(z = x+iy)$
   (a) $f(z) = x + a\,y + \mathbf{i}(b\,x + c\,y)$
   (b) $f(z) = \cos x\,(\cosh y + a\sinh y) + \mathbf{i}\,\sin x\,(\cosh y + b\sinh y)$

4. Man entwickle folgende Funktionen in $z_0 \in \mathbb{C}$ in eine Potenzreihe:
   (a) $f(z) = e^z$, $z_0 = \pi\mathbf{i}$
   (b) $f(z) = \dfrac{1}{z-\mathbf{i}}$, $z_0 = 0$
   (c) $f(z) = \dfrac{1}{(z-\mathbf{i})^3}$, $z_0 = -\mathbf{i}$
   (d) **(HA)** $f(z) = \dfrac{2z+1}{(z^2+1)(z+1)^2}$, $z_0 = 0$ (Hinweis: Partialbruchzerlegung)

5. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Reihen? Man gebe im Falle der Konvergenz die Summe der Reihe an!

   (a) $1 + (2z+1) + (2z+1)^2 + \cdots$

   (b) $1 + 2\dfrac{z-1}{z+1} + 2\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2 + \cdots$

6. Zeigen Sie, dass für die Funktionen $\sinh z := \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ und $\cosh z := \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ die Darstellungen $\sinh z = -\mathbf{i} \sin \mathbf{i}z$ bzw. **(HA)** $\cosh z = \cos \mathbf{i}z$ gelten.

7. Die Reihendarstellungen von e^z, $\cos z$ und $\sin z$ sowie das Potenzgesetz $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ werden als bekannt vorausgesetzt. Man zeige, dass $e^{\mathbf{i}z} = \cos z + \mathbf{i} \sin z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt und leite die Formeln $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ sowie $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$ her!

   Zusatz: Zeigen Sie, dass $f(z) = \sin z$ und $g(z) = \cos z$ nur reelle Nullstellen haben.

8. Sei $f(z) = u(z) + \mathbf{i}\, v(z) = \rho(z)e^{\mathbf{i}\theta(z)}$ eine holomorphe Funktion im Gebiet G. Man beweise: Wenn eine der Funktionen $u, v, \rho, \theta : G \longrightarrow \mathbb{R}$ konstant ist, so ist auch $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ konstant.

9. Man zeige: Wenn $f(z)$ im Gebiet G holomorph ist und $f'(z) = 0$ in G gilt, so ist $f(z)$ in G konstant.

10. Sei $z = re^{\mathbf{i}\varphi}$ und $f(z) = u(r,\varphi) + \mathbf{i}\, v(r,\varphi)$. Man schreibe die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für Polarkoordinaten auf.

11. Sei $z = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Man zeige die Gültigkeit folgender Formeln:

    (a) $\mathsf{Re}\, \sin z = \sin x \, \cosh y$

    (b) **(HA)** $|\sin z| = \sqrt{(\sinh y)^2 + \sin^2 x}$

    (c) **(HA)** $\mathsf{Im}\, \sin z = \cos x \cdot \sinh y$

    (d) $\cos z = \cos x \cosh y - \mathbf{i} \sin x \sinh y$

12. Auf welchen Teilmengen der komplexen Zahlenebene sind die Funktionen $f_1(z) = e^z$ $f_2(z) = \cos z$, **(HA)** $f_3(z) = \sin z$ reellwertig? Man berechne

$$f_1\left(\frac{\pi}{2}(1+\mathbf{i})\right), \quad f_2(\pi + \mathbf{i}), \quad \textbf{(HA)}\ f_3(2\mathbf{i}).$$

13. Man bestimme (für $k \in \mathbb{Z}$ fixiert) das Bild des Gebietes

$$G_k = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2}(2k-1) < \mathsf{Re}\, z < \frac{\pi}{2}(2k+1) \right\}$$

    bei der Abbildung $w = f(z) = \sin z$.

    Zusatz: Ist $f : G_k \longrightarrow \mathbb{C}$ eineindeutig?

14. Unter einem (natürlichen) Logarithmus einer komplexen Zahl z versteht man eine komplexe Zahl w mit der Eigenschaft $z = e^w$. Man bestimme alle (natürlichen) Logarithmen sowie den Hauptwert des Logarithmus von $z_1 = \mathbf{i}$ und $z_2 = (1+\mathbf{i})^3$.

15. Man bestimme das Bild D' des Gebietes D bei der Abbildung $f(z)$.

    (a) $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, z > 0\}$, $f(z) = z^2$

    (b) $D = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \mathsf{Im}\, z < 0\}$, $f(z) = e^z$.

    (c) **(HA)** Welches Gebiet D_n wird bei der Abbildung $w = z^n$ $(n \in \mathbb{N})$ auf die "geschlitzte" Ebene $\mathbb{C}' = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ eineindeutig abgebildet?

16. Gibt es eine in einer Umgebung des Nullpunktes analytische Funktion, die in den Punkten $z_n = \frac{1}{n}$ folgende Werte annimmt? (Hinweis: Identitätssatz)

    (a) $0, \dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{4}, 0, \dfrac{1}{6}, \ldots$ (b) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots$

17. Welche der folgenden Funktionen sind ganze Funktionen?

    (a) $\sin \overline{z}$ (b) **(HA)** $\sin |z|$ (c) $\overline{\sin \overline{z}}$

18. Man berechne

    (a) $\displaystyle\int_\alpha^\beta z\, dz$, (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi\mathbf{i}} e^z\, dz$, (c) $\displaystyle\int_0^{(1+\mathbf{i})\pi} \cos z\, dz$,

    (d) **(HA)** $\displaystyle\int_K z\overline{z} dz$, wobei K die geradlinige Verbindung von 0 nach $1 + \mathbf{i}$ ist.

19. Man berechne unter Verwendung der Cauchyschen Integralformel das Integral

$$I_K := \int_K \frac{dz}{1+z^2},$$

    wenn K positiv orientiert und durch folgende Gleichungen gegeben ist:

    (a) $|z - \mathbf{i}| = 1$ (b) $|z + \mathbf{i}| = 1$ (c) **(HA)** $|z| = 2$

20. Man berechne

    (a) $\displaystyle\int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3}$, (b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+\mathbf{i}}$, (c) $\displaystyle\int_{|z+2\mathbf{i}|=3} \frac{dz}{z^2+\pi^2}$,

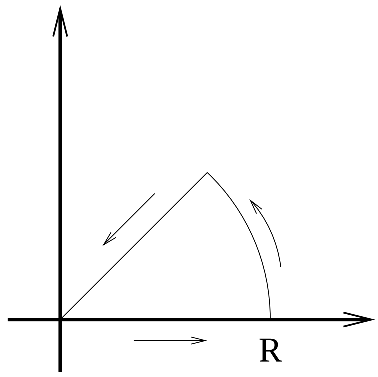
    (d) **(HA)** $\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{1-z} dz}{z^3(1-z)}$, (e) **(HA)** $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$,

    (f) **(HA)** $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n (z-b)^m}$ $(n, m \in \mathbb{N},\ |a| < r < |b|)$.

21. Man berechne die Fresnelschen Integrale

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \sin x^2\,dx$$

mittels Integration der Funktion $f(z) = e^{\mathbf{i}\,z^2}$ entlang der in der Abbildung angegebenen Kurve und Grenzübergang $R \longrightarrow \infty$.



22. Man zeige, dass der Wertebereich $\{f(z) : z \in \mathbb{C}\}$ einer nicht konstanten, ganzen Funktion $f(z)$ dicht in $\mathbb{C}$ ist. (Hinweis: Satz von Liouville)

23. Man beweise folgende Verallgemeinerung des Satzes von Liouville: Ist $f(z)$ eine ganze Funktion und existieren Konstanten $c > 0$ und $R > 0$, so dass $|f(z)| \le c|z|^m \ \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus U_R(0)$, so ist $f(z)$ ein Polynom, dessen Grad außerdem nicht größer als m ist.

24. Man entwickle die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ in folgenden Gebieten in eine Laurentreihe:

    (a) $0 < |z| < 1$ (b) $0 < |z-1| < 1$ (c) $1 < |z| < \infty$

25. Man entwickle die Funktion $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ in folgenden Gebieten in eine Laurentreihe:

    (a) $1 < |z| < 2$ (b) $2 < |z| < \infty$ (c) $0 < |z-2| < 1$ (d) $0 < |z-1| < 1$

26. Man entwickle folgende Funktionen an ihren singulären Stellen in eine Laurentreihe. Man gebe das Konvergenzgebiet der Reihen an!

    (a) $f_1(z) = e^{(1-z)^{-1}}$ (b) $f_2(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2}$ (c) $f_3(z) = e^{-z^{-2}}$ (d) $f_4(z) = \dfrac{\sin z}{z}$

27. Man charakterisiere für die Funktionen der Aufgaben 24, 25 und 26 die singulären Stellen (Polstelle, hebbare oder wesentliche Singularität) und ermittle die Residuen an diesen Stellen.

28. Man berechne möglichst effektiv die Residuen von $f(z)$ an den angegebenen Stellen

(a) $f(z) = \dfrac{1}{(z+3)(z-5)^2}\,, \;\; z_1 = -3,\; z_2 = 5$

(b) $f(z) = (\sin z - \cos z)^{-1}\,, \;\; z_0 = \dfrac{\pi}{4}$

(c) $f(z) = \sin\dfrac{1}{1-z}\,, \;\; z_0 = 1$

(d) $f(z) = \dfrac{1}{1-e^z}\,, \;\; z_0 = 0$

(e) $f(z) = \dfrac{1}{1+z-e^z}\,, \;\; z_0 = 0$

29. Man berechne folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

(a) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\,dz$ (b) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\mathbf{i}\cot z}{z(z-1)}\,dz$ (c) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{1-z}}{z(1-z)}\,dz$

30. Man berechne folgende uneigentlichen (reellen) Integrale:

(a) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}\,,\; n = 0, 1, 2, \cdots$ (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$ (c) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$

3.8 Konforme Abbildungen

3.8.1 Die Riemannsche Zahlenkugel und der unendlich ferne Punkt

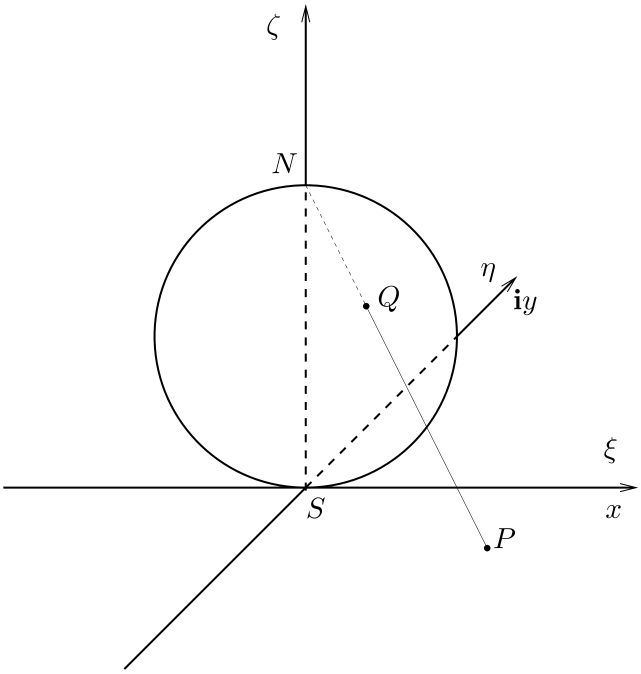
Wir betrachten die Kugeloberfläche

$$K = \left\{ (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\}.$$

Die Punkte $N = [0, 0, 1]^T$ und $S = [0, 0, 0]^T$ auf dieser Kugel nennen wir Nord- bzw. Südpol. Die z-Ebene ($z = x + \mathbf{i}y$) identifizieren wir mit der $\xi\eta$-Ebene. Die **stereografische Projektion** Q eines Punktes P mit den Koordinaten (x, y) bzw. der komplexen Zahl $z = x + \mathbf{i}y$ ist als der Schnittpunkt der Strecke, die P mit dem Nordpol N verbindet, mit der Kugeloberfläche K definiert. Die Koordinaten ξ, η, ζ von Q ergeben sich als Lösung des Gleichungssystems

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\,,$$

$$\frac{x-\xi}{x} = \frac{y-\eta}{y} = \frac{-\zeta}{-1}\,.$$



Es folgt

$$\eta = y(1-\zeta) \quad \text{und} \quad \xi = x(1-\zeta)\,,$$

woraus sich

$$\xi = \frac{x}{1+x^2+y^2}\,, \quad \eta = \frac{y}{1+x^2+y^2}\,, \quad \zeta = \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$$

ergibt. Umgekehrt gilt

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}\,,\ y = \frac{\eta}{1-\zeta} \quad \text{für} \quad [\xi,\eta,\zeta]^T \in K\,,\ \zeta \neq 1\,.$$

Die stereografische Projektion ist eine injektive Abbildung der komplexen Zahlenebene in die Kugeloberfläche K. Dabei ist der Nordpol der einzige Punkt auf K, der kein Urbild besitzt. Deshalb erweitern wir das Definitionsgebiet der stereografischen Projektion, indem wir sagen, dass das Urbild des Nordpols der **unendlich ferne Punkt** P_∞ sei. Wir schreiben $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{P_\infty\}$. Als Umgebungen des unendlich fernen Punktes können die Mengen $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{U_R(0)}$ betrachtet werden. So können wir z.B. für $|z| > 1$ schreiben

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}$$

und

$$\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}, \quad |z| > 1\,,$$

als Laurentreihenentwicklung der Funktion $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ in der Umgebung des unendlich fernen Punkt P_∞ betrachten. Diese Entwicklung erhalten wir auch, wenn wir die Funktion $g(\zeta) = f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ in der Umgebung des Nullpunktes entwickeln,

$$g(\zeta) = \frac{1}{1-\frac{1}{\zeta}} = -\zeta\,\frac{1}{1-\zeta} = -\sum_{n=1}^{\infty} \zeta^n\,, \quad |\zeta| < 1\,,$$

und $\zeta = \dfrac{1}{z}$ setzen.

3.8.2 Der Begriff der konformen Abbildung

Es sei durch $z(t) = x(t) + \mathbf{i}y(t)$, $a \le t \le b$, eine Kurve $C \subset G \subset \mathbb{C}$ gegeben, d.h.

$$C = \{z(t) : a \le t \le b\}\ ,$$

wobei $z'(t) = x'(t) + \mathbf{i}y'(t) \neq 0\ \forall\, t \in [a,b]$ gilt. Die Ableitung $z'(t_0)$ gibt die Richtung der Tangente an die Kurve C im Punkt $z_0 = z(t_0)$ an. Sind $f(z)$ eine in G holomorphe Funktion und $C^* = f(C) = \{f(z) : z \in C\}$ die entsprechende Bildkurve sowie $f'(z_0) \neq 0$, so gibt

$$f'(z_0)z'(t_0)$$

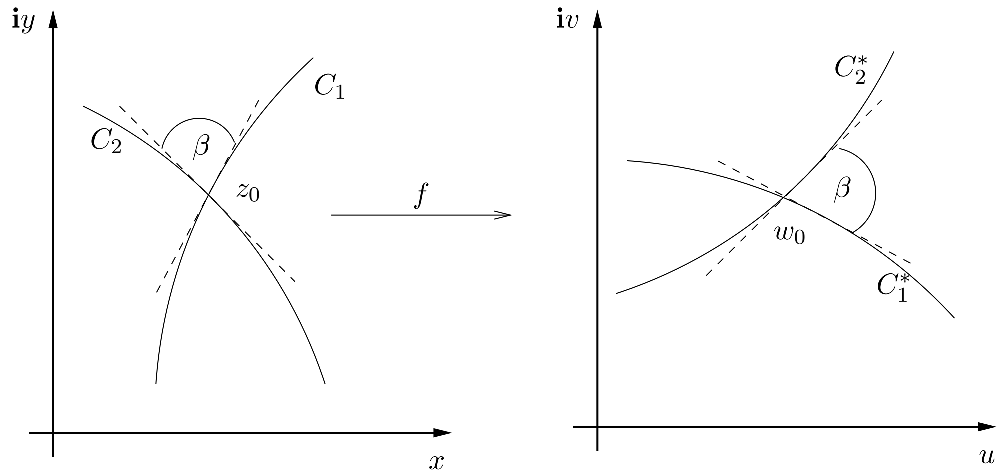
nach der Kettenregel die Richtung der Tangente an die Kurve C^* im Punkt

$$w_0 = f(z_0) = w(t_0)$$

mit $w(t) = f(z(t))$ an. Die Tangente wird also um den Winkel $\varphi_0 \in (-\pi, \pi]$ gedreht, wobei

$$f'(z_0) = \left|f'(z_0)\right| e^{\mathbf{i}\varphi_0}\,.$$

Für zwei sich in z_0 schneidende Kurven $C_1, C_2 \subset G$ bedeutet dies, dass die Winkel zwischen den Kurven im Schnittpunkt bei der Abbildung $f(z)$ erhalten bleiben. Solche Abbildungen nennt man in z_0 **winkeltreu**.



Also: Eine in z_0 holomorphe Funktion f mit $f'(z_0) \neq 0$ ist in z_0 winkeltreu.

Die Funktion $f(z) = z^2$ ist in $z_0 = 0$ **nicht** winkeltreu.

Definition 3.26 *Eine Abbildung f heißt* **(lokal) konform** *im Punkt z_0, falls f in z_0 holomorph mit $f'(z_0) \neq 0$ ist. Ist $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ in jedem Punkt $z \in G$ lokal konform, so heißt sie konform im Gebiet G.*

Konforme Abbildungen sind also lokal bijektive und winkeltreue Abbildungen. Es gilt aber auch der folgende Satz.

Satz 3.27 *Ist f auf dem Gebiet G lokal bijektiv und winkeltreu, so ist f auf G konform.*

Satz 3.28 (Riemannscher Abbildungssatz) *Es seien G und G^* einfach zusammenhängende echte Teilgebiete von $\mathbb{C}$. Dann gibt es eine konforme Abbildung $f : G \longrightarrow G^*$, die außerdem bijektiv ist.*

- Nach dem Satz von Liouville gibt es z.B. **keine** konforme Abbildung von $\mathbb{C}$ auf $\{|z| < 1\}$.
- Ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet kann nicht eineindeutig und konform auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet abgebildet werden.

Satz 3.29 (Ränderzuordnung) *Die Ränder ∂G und ∂G^* der Gebiete G und G^* seien einfache geschlossene, stetige Kurven und $f : G \longrightarrow G^*$ sei konform und bijektiv. Dann kann $f(z)$ so auf ∂G fortgesetzt werden, dass $f : \overline{G} \longrightarrow \overline{G^*}$ bijektiv und stetig ist.*

Bemerkung 3.30 *Man kann den Satz 3.29 auf Gebiete, deren Ränder den unendlich fernen Punkt enthalten, ausdehnen.*

3.8.3 Gebrochen lineare Abbildungen

In diesem Abschnitt betrachten wir Abbildungen $f : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ der Gestalt

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{3.14}$$

für gegebene komplexe Zahlen a, b, c, d. Ein einfacher Vertreter ist die Abbildung

$$f(z) = \frac{1}{z} = \overline{\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}.$$

Die zweite Schreibweise zeigt, dass sich die Abbildung $z \mapsto \frac{1}{z}$ aus der Spiegelung am Einheitskreis und der Spiegelung an der reellen Achse zusammensetzt.

Spiegelung am Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r: Das Bild von $P \neq M$ ist der Punkt Q, der auf dem Strahl $\overrightarrow{MP}$ liegt und für den $|MP| \cdot |MQ| = r^2$ gilt.

Wir betrachten jetzt die allgemeine Situation (3.14):

1. Fall $c = 0\,,\ d \neq 0:$ Dann ist $f(z) = \dfrac{a}{d}\, z + \dfrac{b}{d}$ ein lineares Polynom, falls $a \neq 0$.

2. Fall $c \neq 0:$ Dann lässt sich $f(z)$ in der Form

$$f(z) = \frac{1}{cz+d}\left[\frac{a}{c}(cz+d) + b - \frac{ad}{c}\right] = \frac{bc-ad}{c}\,\frac{1}{cz+d} + \frac{a}{c}$$

   schreiben. Es gilt also $f \not\equiv \text{const}$ genau dann, wenn $ad - bc \neq 0$ ist. Dabei ergibt sich das Bild $w = f(z)$ durch die Nacheinanderausführung folgender Abbildungen:

$$z \mapsto z_1 = cz + d \mapsto z_2 = \frac{1}{z_1} \mapsto w = \frac{bc-ad}{c} z_2 + \frac{a}{c}$$

Eine Funktion der Gestalt (3.14) mit $ad - bc \neq 0$ nennt man auch **Möbius-Transformation**.

Satz 3.31 *Für $c \neq 0\,,\ ad - bc \neq 0\,,\ f(P_\infty) := \frac{a}{c}\,,\ f\left(-\frac{d}{c}\right) := P_\infty$ ist $f : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ bijektiv. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch*

$$z = f^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}\,.$$

Wir berechnen

$$f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0 \quad \text{für} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

und erhalten den folgenden Satz.

Satz 3.32 *Die gebrochen lineare Abbildung* (3.14) *mit $c \neq 0$ und $ad - bc \neq 0$ ist eine konforme und bijektive Abbildung von $\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ auf $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$.*

Für gegebene $\alpha\,,\ \gamma \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha\,\gamma < |\beta|^2$ betrachten wir die Menge

$$K = \left\{z \in \mathbb{C} : \alpha\, z\overline{z} + \beta\, z + \overline{\beta}\,\overline{z} + \gamma = 0\right\}. \tag{3.15}$$

1. Fall: $\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned}
\alpha\, z\overline{z} + \beta\, z + \overline{\beta}\,\overline{z} + \gamma = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z\overline{z} + \frac{\beta}{\alpha} z + \frac{\overline{\beta}}{\alpha}\overline{z} + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(z + \frac{\overline{\beta}}{\alpha}\right)\left(\overline{z} + \frac{\beta}{\alpha}\right) + \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{|\beta|^2}{\alpha^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left|z + \frac{\overline{\beta}}{\alpha}\right|^2 = \frac{|\beta|^2 - \alpha\,\gamma}{\alpha^2}
\end{aligned}$$

   K ist also ein Kreis mit dem Mittelpunkt $-\dfrac{\overline{\beta}}{\alpha}$ und dem Radius $\sqrt{\dfrac{|\beta|^2 - \alpha\,\gamma}{\alpha^2}}$.

2. Fall: $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} z = x + \mathbf{i}y: \quad & \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \beta(x + \mathbf{i}y) + \overline{\beta}(x - \mathbf{i}y) + \gamma = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (\beta + \overline{\beta})x + \mathbf{i}(\beta - \overline{\beta})y + \gamma = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (2\mathsf{Re}\,\beta)x - (2\mathsf{Im}\,\beta)y + \gamma = 0 \end{aligned}$$

In diesem Fall ist K also eine Gerade.

3. Ist umgekehrt $K = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| = r\}$ ein Kreis, so zeigt die Überlegung

$$\begin{aligned} |z - z_0| = r \quad \Leftrightarrow \quad & |z - z_0|^2 = r^2 \\ \Leftrightarrow \quad & (z - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}) = r^2 \\ \Leftrightarrow \quad & z\overline{z} - \overline{z_0}z - z_0\overline{z} + |z_0|^2 - r^2 = 0\,, \end{aligned}$$

dass sich K in der Form (3.15) (mit $\alpha = 1$, $\beta = -\overline{z_0}$, $\gamma = |z_0|^2 - r^2$) schreiben lässt, wobei

$$\alpha\,\gamma = |z_0|^2 - r^2 < |z_0|^2 = |\beta|^2$$

gilt.

4. Ist $K = \{z = x + \mathbf{i}y \in \mathbb{C} : Ax + By + C = 0\}$ mit $A, B, C \in \mathbb{R}$ und $|A| + |B| > 0$ eine Gerade, so folgt aus

$$\begin{aligned} Ax + By + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad & A\,\frac{z + \overline{z}}{2} - \mathbf{i}B\,\frac{z - \overline{z}}{2} + C = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{A - \mathbf{i}B}{2}\,z + \frac{A + \mathbf{i}B}{2}\,\overline{z} + C = 0\,, \end{aligned}$$

dass sich K auch in diesem Fall in der Form (3.15) (mit $\alpha = 0$, $\beta = (A - \mathbf{i}B)/2$, $\gamma = C$) schreiben lässt.

Satz 3.33 *Jede gebrochen lineare Abbildung* (3.14) *mit* $ad - bc \neq 0$ *bildet Kreise auf Kreise ab, wobei wir Geraden als Kreise durch* P_∞ *auffassen.*

Beweis. Der Fall $c = 0$ ist klar. Da für $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$ sich die Abbildung (3.14) aus

$$z \to z_1 = cz + d \to z_2 = \frac{1}{z_1} \to w = \frac{bc - ad}{c} z_2 + \frac{a}{c}$$

zusammensetzt, genügt es den Beweis für $w = \frac{1}{z}$ zu führen. Aus

$$\alpha\, z\, \overline{z} + \beta\, z + \overline{\beta}\, \overline{z} + \gamma = 0\,, \quad \alpha\,\gamma < |\beta|^2\,, \quad z = \frac{1}{w}$$

folgt

$$\alpha + \beta\, \overline{w} + \overline{\beta}\, w + \gamma\, w\, \overline{w} = 0\,,$$

woraus sich die Behauptung ergibt. □

Satz 3.34 *Seien $ad - bc \neq 0$, K ein Kreis und z_1 und z_2 Spiegelpunkte bzgl. K. Dann sind $w_1 = f(z_1)$ und $w_2 = f(z_2)$ Spiegelpunkte bzgl. $f(K)$.*

Beispiel 3.35 *Wir suchen alle gebrochen linearen Abbildungen (3.14), die die obere Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ auf das Innere des Einheitskreises $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ abbilden und einen gegebenen Punkt z_0 mit $\operatorname{Im} z_0 > 0$ auf $w_0 = 0$.*
Lösung: Wegen der Ränderzuordnung (vgl. Satz 3.29) muss $|f(P_\infty)| = 1$ sein. Es folgt $a \neq 0$. Wir wählen $a = 1$, d.h.

$$w = f(z) = \frac{z+b}{cz+d}.$$

Dann ist

$$0 = f(z_0) = \frac{z_0+b}{cz_0+d}, \text{ also } b = -z_0,$$

und somit

$$f(z) = \frac{z-z_0}{cz+d}.$$

Aus Satz 3.34 folgt $f(\overline{z_0}) = P_\infty$, so dass

$$f(z) = \frac{1}{c}\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}.$$

Damit die reelle Achse auf den Einheitskreis abgebildet wird, bleibt nur noch die Bedingung $|f(0)| = 1$, d.h. $\dfrac{1}{|c|} = 1$, zu erfüllen. Die gesuchten Funktionen sind also von der Gestalt

$$f(z) = e^{\mathbf{i}\varphi}\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Beispiel 3.36 *Wir suchen alle gebrochen linearen Abbildungen, die den Einheitskreis auf den Einheitskreis abbilden und einen Punkt z_0 mit $|z_0| < 1$ auf $w_0 = 0$.*
Lösung:

$$f(z) = e^{\mathbf{i}\varphi}\frac{z-z_0}{1-z\overline{z_0}}, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

3.8.4 Die Joukowski-Funktion

Diese Funktion ist definiert als

$$w = J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{3.16}$$

Wir setzen

$$w = u + \mathbf{i}v, \ z = re^{\mathbf{i}\varphi}, \ u, v \in \mathbb{R}, \ r > 0, \ 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} u + \mathbf{i}v &= \frac{1}{2}\left(re^{\mathbf{i}\varphi} + \frac{1}{r}e^{-\mathbf{i}\varphi}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi) + \frac{1}{r}(\cos\varphi - \mathbf{i}\sin\varphi)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + \frac{\mathbf{i}}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \end{aligned}$$

Also ist (3.16) äquivalent zu

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi\,, \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi\,. \tag{3.17}$$

Folgerung 3.37

1. $J(\{r = 1\}) = \{\cos\varphi : 0 \le \varphi < 2\pi\} = [-1, 1]$. *Dabei wird das offene Intervall* $(-1, 1)$ *zweimal durchlaufen.*

2. *Für* $r \neq 1$ *folgt aus* (3.17)
$$\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\right]^2} + \frac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\right]^2} = 1\,, \tag{3.18}$$
d.h., die Bilder der Kreise $\{|z| = r\}$, $r > 0$, $r \neq 1$, *sind Ellipsen mit der Exzentrizität*
$$\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\right]^2} = 1\,,$$
d.h., den Brennpunkten ± 1.

3. *Das Bild der positiven reellen Achse* $\left\{r\, e^{\mathbf{i}\varphi} : \varphi = 0,\ r > 0\right\}$ *ist*
$$\left\{u + \mathbf{i}v : u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right),\ v = 0,\ r > 0\right\} = [1, +\infty)\,.$$
Dabei wird das Intervall $(1, +\infty)$ *zweimal durchlaufen. Analog ist das Bild der negativen reellen Achse das Intervall* $(-\infty, -1]$, *wobei das Intervall* $(-\infty, -1)$ *zweimal durchlaufen wird. Das Bild der positiven imaginären Achse* $\left\{r\, e^{\mathbf{i}\varphi} : \varphi = \frac{\pi}{2},\ r > 0\right\}$ *ist*
$$\left\{u + \mathbf{i}v : u = 0,\ v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right),\ r > 0\right\} = \mathbf{i}\mathbb{R}\,,$$
was auch gleich dem Bild der negativen imaginären Achse ist.

4. *Wir betrachten die Halbgeraden* $G_{\pm\alpha} = \left\{r\, e^{\pm\mathbf{i}\alpha} : r > 0\right\}$ *für* $0 < \alpha < \pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. *Aus* (3.17) *folgt dann*
$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\alpha\,, \quad v = \pm\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\alpha$$
bzw.
$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1\,. \tag{3.19}$$
Hieraus ergibt sich, dass das Bild von $G_{\pm\alpha}$ *der rechte Ast der Hyperbel* (3.19) *im Fall* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ *bzw. der linke Ast der Hyperbel* (3.19) *für* $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ *ist.* (*Die Brennpunkte der Hyperbel* (3.19) *sind* ± 1.)

5. *Für* $z \neq \pm 1$ *und* $z \neq 0$ *gilt* $J'(z) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{z^2}\right) \neq 0$, *so dass* $J(z)$ *außerhalb dieser Punkte winkeltreu ist. Also stehen die Ellipsen* (3.18) *und die Hyperbeln* (3.19) *senkrecht aufeinander.*

6. *Die Abbildungen*

$$J : \{0 < |z| < 1\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus [-1, 1] \quad \text{und} \quad J : \{|z| > 1\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$$

sind bijektiv und konform.

Index