Skript zur Vorlesung

Analysis I

für Physiker

WS 2005/06

Peter Junghanns

Hinweis: Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Aufbaukurs Differential- und Integralrechung

Dieses Kapitel soll sowohl einige Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung anwendungsbereit machen als auch Hilfestellung für die Verwendung mathematischer Hilfsmittel in anderen Lehrveranstaltungen des Studienganges Physik geben. Wir setzen dabei voraus, dass die grundlegenden Eigenschaften der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen und ihrer Teilmengen

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ der natürlichen Zahlen,

$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ der ganzen Zahlen,

$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N} \right\}$ der rationalen Zahlen

zusammen mit den Grundrechenarten und den Eigenschaften der Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$ bekannt sind. Auch mit dem Begriff der Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und dem des Grenzwertes einer Zahlenfolge sollte man vertraut sein. Ausserdem werden wir immer wieder auf die folgenden drei Eigenschaften der reellen Zahlen zurückgreifen:

1. Die **Dichtheit** der Menge der reellen Zahlen:

   Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen existiert stets eine weitere reelle Zahl, d.h.

   $$a, b \in \mathbb{R}\,,\ a < b \ \Rightarrow\ \exists\, c \in \mathbb{R} : a < c < b\,.$$

   (Lies: "Aus $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ folgt die Existenz einer reellen Zahl c mit der Eigenschaft $a < c < b\,$.")

2. Die **Vollständigkeit** der Menge der reellen Zahlen:

   Für zwei Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ reeller Zahlen mit den Eigenschaften

   $$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$$

   existiert stets genau eine reelle Zahl c mit $a_n \leq c \leq b_n \;\forall\, n \in \mathbb{N}\,$. Es gilt also das **Intervallschachtelungsprinzip**. Es sei bemerkt, dass dies in der Menge der rationalen Zahlen nicht der Fall ist.

3. Die Gültigkeit des **Archimedesschen Axioms**:

$$\forall\, a \in \mathbb{R}\ \exists\, n \in \mathbb{N} : n > a$$

(Lies: "Für jede reelle Zahl existiert eine größere natürliche Zahl.") Man kann dieses Axiom auch in der Form

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$$

schreiben, was nichts anderes als $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ bedeutet. Die Zahlenfolge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ ist also eine Nullfolge.

Bemerkung 0.1 *Wir erinnern daran, dass wir unter einer* **Nullfolge** *eine Zahlenfolge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *verstehen, für die zu jeder positiven Zahl* ε *ein Index* $N \in \mathbb{N}$ *mit der Eigenschaft existiert, dass* $|a_n| < \varepsilon\ \forall\, n > N$ *gilt. Wir sagen dann, dass die Zahlenfolge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *den* **Grenzwert** *a hat, wenn* $(a_n - a)_{n=1}^{\infty}$ *eine Nullfolge ist.*

Bemerkung 0.2 *Eng verknüpft mit dem Begriff des Grenzwertes einer Zahlenfolge ist der Begriff der* **Summe einer Zahlenreihe** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *. Unter dieser Reihe versteht man nämlich die Folge* $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ *der Partialsummen*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

und unter der Summe der Reihe den Grenzwert der Zahlenfolge der Partialsummen (falls er existiert)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n\,.$$

Bezugnehmend auf die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen soll hier das **Beweisprinzip der vollständigen Induktion** erwähnt werden. Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist die kleinste Menge reeller Zahlen mit den Eigenschaften

(N1) $1 \in \mathbb{N}$,

(N2) $n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ n+1 \in \mathbb{N}$.

Die Menge der natürlichen Zahlen besitzt die folgende sogenannte Wohlordnungseigenschaft:

(N3) Jede nichtleere Teilmenge der Menge $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.

Wir nehmen nun an, dass eine Aussage $P(n)$, die von $n \in \mathbb{N}$ abhängt, zu beweisen sei (z.B. die Aussage "$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$"). Das Prinzip der vollständigen Induktion besagt dann, dass die Aussage $P(n)$ genau dann für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

(I1) $P(1)$ ist wahr.

(I2) Aus der Gültigkeit von $P(1), \ldots, P(k)$ für $k \in \mathbb{N}$ folgt stets die Gültigkeit von $P(k+1)$.

Begründung: Wir haben zu zeigen, dass aus (I1) und (I2) folgt, dass $P(n)$ für alle n wahr ist. Dazu verwenden wir die Methode des indirekten Beweises und nehmen an, dass die Menge

$$M = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ ist falsch}\}$$

nicht leer ist. Nach (N3) existiert eine kleinste Zahl n_0 in M. Wegen (I1) ist $n_0 > 1$, und $P(1), \ldots, P(n_0 - 1)$ sind wahr. Aus (I2) folgt, dass auch $P(n_0)$ wahr ist, was im Widerspruch zu $n_0 \in M$ steht.

0.1 Übungsaufgaben

Wir erinnern an die Definition des Betrages $|x|$ einer reellen Zahl x :

$$|x| = \begin{cases} x & : \ x \geq 0\,, \\ -x & : \ x < 0\,. \end{cases}$$

1. Beweisen Sie folgende Aussagen:
   (a) Es gilt $|x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Es gilt $|x| = 0$ dann und nur dann, wenn $x = 0$.
   (c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
   (d) Es gilt die Dreiecksungleichung $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
   (e) $\Big| |x| - |y| \Big| \leq |x - y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
   (f) $\Big| |y - x| - |z - y| \Big| \leq |x - z| \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$

2. Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Ungleichungen bzw. Gleichungen
   (a) $|x - 2| \geq 10$, (b) **(HA)** $|x| > |x + 1|$, (c) $|x + 2| + |x - 2| \leq 12$,
   (d) **(HA)** $|x+2| - |x| > 1$, (e) $|x-1| \cdot |x-2| = 2$, (f) **(HA)** $|x| + |x+1| + |x-1| = 3$?

3. Veranschaulichen Sie in der xy–Ebene die Lösungsmengen folgender Ungleichungen:
   (a) $|x| + |y| \leq 1$, (b) $|x + y| \leq 1$, (c) $1 \leq |x - y| \leq 2$.

4. Verwenden Sie die Beziehungen

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1\,, \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\,, \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1\,, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0\,, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1\,,$$

   und

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta\,,$$

   zum Nachweis der Richtigkeit folgender Formeln:

(a) $\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\alpha\,,$

(b) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta\,,$

(c) $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}\,,$

(d) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\,,$

(e) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\,,$

(f) $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\,.$

5. Lösen Sie folgende Gleichungen bzw. Gleichungssysteme:

   (a) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 12\,,$

   (b) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7\,,$

   (c) $\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = 5\,,$

   (d) $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = a\,,\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = b\,,$

   (e) **(HA)** $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}\,,$

   (f) $\lg\left(3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}\right) - 2 = \frac{1}{4}\lg 16 - \sqrt{x+0.25}\,\lg 4\,.$

6. Man löse folgende Ungleichungen:

   (a) $3^{4x^2-7x-14} \geq 9^{x^2-3x-4}\,,$ (b) **(HA)** $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}\,,$

   (c) $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-9} + \sqrt{5-x}\,,$ (d) **(HA)** $\sqrt{2+x-x^2} > x-4\,.$

7. Dividieren Sie:

   (a) $(21a^3 - 34a^2b + 25b^3) : (7a+5b)\,,$ (b) **(HA)** $(9x^3 + 2y^3 - 7xy^2) : (3x-2y)\,.$

8. Vereinfachen Sie:

   (a) $\dfrac{16-49m^2}{16-28m}\,,$ (b) $\dfrac{x^2-4y^2}{x^2-4xy+4y^2}\,,$ (c) $\dfrac{a}{a^2-2ab+b^2} - \dfrac{a}{a^2-b^2} + \dfrac{1}{a+b}\,,$

   (d) $\dfrac{\frac{a+1}{a-1}-1}{\frac{a+1}{a-1}+1}\,,$ (e) $\dfrac{\frac{1}{y^2}+\frac{2}{xy}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2}-\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,,$ (f) **(HA)** $\left(a^{-x}\right)^{-2y}\,,$ (g) **(HA)** $\left(-a^{-3}\right)^{2n}\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$

   (h) **(HA)** $\left(\dfrac{b^{-5}x^2}{a^{-6}y^{-4}}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{a^4b^{-3}}{x^{-1}y^{-2}}\right)^{-6}\,,$ (i) **(HA)** $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{2}{3}}\,,$ (j) **(HA)** $a^{\frac{5}{3}} : a^{\frac{2}{5}}\,,$

   (k) **(HA)** $\sqrt[5]{a^2b^2}\,\sqrt[3]{ab^4}\,ab^{-1}\,,$ (l) **(HA)** $\sqrt[3]{a\sqrt{b}}\,,$ (m) **(HA)** $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\,.$

9. Geben Sie zu folgenden Ausdrücken die quadratische Ergänzung an:

   (a) $x^2 + 6x\,,$ (b) $z^2 - \frac{1}{7}z\,,$ (c) $\frac{16}{49}t^2 - \frac{16}{21}t\,.$

10. Überprüfen Sie die Richtigkeit folgender Gleichungen:
    (a) $\dfrac{\sqrt[n]{a^{2n-3}} \cdot \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n+7}}{\sqrt[n]{a^4}} = a^3$, (b) $\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a^4-x^4}}\,(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = (a-x)^{-\frac{1}{2}}$,
    (c) **(HA)** $0.5^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$.
11. Machen Sie den Nenner rational:
    (a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, (b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$, (c) $\dfrac{1}{2\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.
12. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt
    (a) $(\log_2 x)^{-1} - (\log_2 x - 1)^{-1} < 1$, (b) $\sin x + \cos x = 1$?

0.2 Ein paar grundlegende Gleichungen und Ungleichungen

0.2.1 Die geometrische Summenformel

Für $q \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \tag{0.1}$$

Der Beweis dieser Gleichung ist denkbar einfach. Man braucht nur das Produkt

$$\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^n\right)(1-q)$$

unter Verwendung des Distributivgesetzes auszurechnen und erhält

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n - q - q^2 - q^3 - \cdots - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}.$$

Aus der Formel (0.1) folgt für $|q| < 1$ (vgl. Bemerkung 0.2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}. \tag{0.2}$$

0.2.2 Die binomische Formel

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ definiert man den **Binominalkoeffizienten**

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} 1 & , \quad k = 0, \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} & , \quad k > 0. \end{cases}$$

Im Fall $\alpha = n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ ist dieser gleich

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

wobei $0! = 1$ und $k! = (k-1)!\,k$ für $k \in \mathbb{N}$. Falls $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$, so gilt

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}. \tag{0.3}$$

Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} &= \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n+1-k+1)}{k!} \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1)+1)(n+1-k+k)}{k!} \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1)+1)(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1)+1)}{(k-1)!} \\
&= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.
\end{aligned}$$

Für beliebige Zahlen a, b und beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt nun die **binomische Formel**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{0.4}$$

Für den Spezialfall $n = 2$ erhält man

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

oder auch (b durch $-b$ ersetzen)

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2.$$

Aus der letzten Gleichung folgt für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ unmittelbar die Ungleichung $2\,a\,b \leq a^2 + b^2$, die man für $a\,b > 0$ auch in der Form

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \tag{0.5}$$

schreiben kann. Aus (0.4) erhält man für $a = 1$ und $b = x$ die Formel

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Diese lässt sich wie folgt verallgemeinern:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad |x| < 1,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Für $x = -q$ folgt hieraus unter Verwendung von

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-k)}{k!} = (-1)^k$$

die Formel (0.2).

0.2.3 Die polynomische Formel

Die binomische Formel (0.4) ist ein Spezialfall ($p = 2$) der polynomischen Formel

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_p)^n = \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \cdots + k_p = n \\ (k_1, k_2, \ldots, k_p) \in \mathbb{N}_0^p}} \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_p!} \, a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_p^{k_p} \,, \tag{0.6}$$

die für beliebige Zahlen $a_1, \ldots, a_p$ und beliebige $p, n \in \mathbb{N}$ gilt.

0.2.4 Die Bernoullische Ungleichung

Für beliebiges reelles $x \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$ und beliebiges $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt

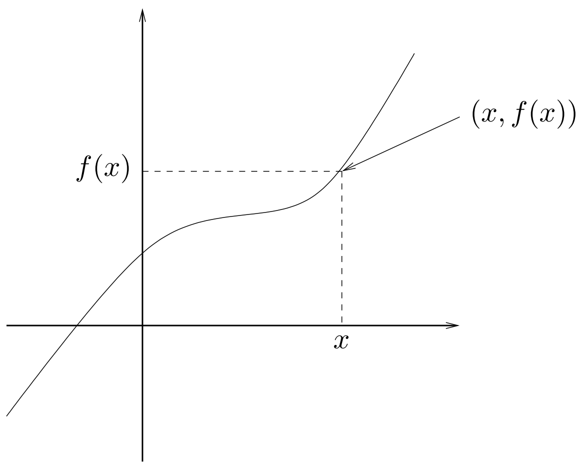
$$(1 + x)^n > 1 + n\, x \,. \tag{0.7}$$

0.3 Elementare Funktionen

Unter einer **reellwertigen Funktion einer reellen Veränderlichen** (kurz auch "reelle Funktion" genannt) verstehen wir eine Abbildung

$$\boxed{f : A \longrightarrow B \,,\; x \mapsto f(x) \,,} \tag{0.8}$$

wobei A und B Teilmengen der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sind. Hier werden wir vorwiegend den Fall betrachten, dass A und B Intervalle (z.B. $[a, b]$ oder (a, b)) der reellen Achse sind, wobei wir auch unbeschränkte Intervalle (z.B. $[0, \infty)$ oder $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ selbst) zulassen. Die Menge geordneter Paare $\{(x, f(x)) : x \in A\} \subset \mathbb{R}^2$ nennt man den **Graph** der Funktion $f : A \longrightarrow B$, den man sich als Kurve in der x-y-Ebene $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ vorstellen kann.



Graph einer Funktion

Die Schreibweise (0.8) einer Funktion besteht aus zwei Teilen: Der erste

$$f : A \longrightarrow B$$

gibt den Definitionsbereich A und eine Menge B an, in der die Werte der Funktion liegen. Der zweite Teil

$$x \mapsto f(x)$$

beinhaltet die Bildungsvorschrift für die Funktionswerte. Ein Beispiel für eine Funktion, deren Graph eine Gerade ist, wäre

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto 2\,x - 3\,,$$

ein Beispiel für eine Funktion mit einer Parabel als Graph ist

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto 3\,x^2 - 4\,x + 5\,.$$

Die Wurzelfunktion könnte man in der Form

$$h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \sqrt{x}\,,$$

mit $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, \infty)$, aber auch in der Form

$$h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+\,,\ x \mapsto \sqrt{x}\,,$$

schreiben.

Es gibt nun einige Begriffe, die vor allem das Wachstumsverhalten der Funktion (bzw. ihres Graphen) genauer beschreiben sollen. Es sei A ein Intervall. Man nennt $f : A \longrightarrow B$

- **monoton** wachsend (bzw. fallend), wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$) für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 < x_2$ gilt,

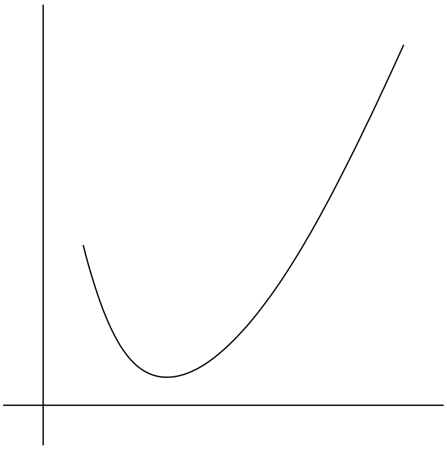
- **streng monoton** wachsend (bzw. fallend), wenn $f(x_1) < f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) > f(x_2)$) für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 < x_2$ gilt,

- nach oben (bzw. unten) **beschränkt**, wenn eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $f(x) \leq M$ (bzw. $f(x) \geq M$) für alle $x \in A$ gilt,

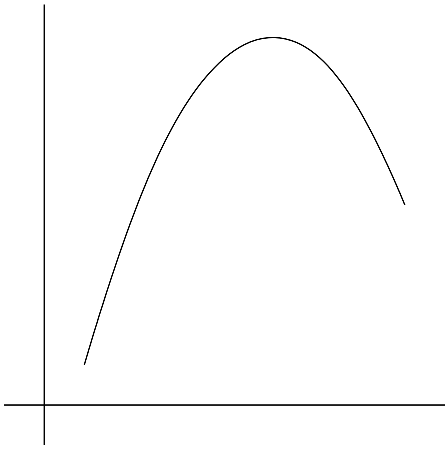
- **beschränkt**, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist, d.h. wenn ein $M \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in A$ gilt,

- **streng konvex**, wenn $f\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right) < \frac{1}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right]$ für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt,

- **streng konkav**, wenn $f\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right) > \frac{1}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right]$ für alle $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ gilt.



konvexe Funktion



konkave Funktion

Ist $f : A \longrightarrow B$ nach oben durch die Zahl M beschränkt, so nennt man M eine **obere Schranke** dieser Funktion. Unter allen oberen Schranken gibt es eine kleinste, die man **obere Grenze** der Funktion nennt und mit $\sup\{f(x) : x \in A\}$ bezeichnet. Analog erklärt man die **untere Grenze** $\inf\{f(x) : x \in A\}$. Falls ein $x^* \in A$ existiert, so dass $f(x^*) = \sup\{f(x) : x \in A\}$ gilt, d.h. $f(x) \le f(x^*)\ \forall\, x \in A$, so nennt man x^* einen **globalen Extremalpunkt** und $f(x^*)$ ein **globales Maximum** der Funktion $f : A \longrightarrow B$. Analog definiert man den Begriff des **globalen Minimums**. Man nennt $x^* \in A$ einen **lokalen Extremalpunkt** und $f(x^*)$ ein **lokales Extremum** der Funktion $f : A \longrightarrow B$, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass x^* ein globaler Extremalpunkt von $f : (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon) \cap A \longrightarrow B$ ist.

Beispiel 0.3 *Die Funktion* $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x^2}$ *besitzt keine Extremalpunkte. Es gilt*

$$\inf\{f(x) : x \in (0,\infty)\} = 1\,, \quad \sup\{f(x) : x \in (0,\infty)\} = \infty\,.$$

Für die Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ *ist* $g(0) = 1$ *globales Maximum und*

$$\inf\{g(x) : x \in \mathbb{R}\} = 0\,, \quad \text{aber} \quad g(x) > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Die Funktion $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto x(x^2 - 3)$ *ist nach oben und unten unbeschränkt, hat aber das lokale Maximum* $h(-1) = 2$ *und das lokale Minimum* $h(1) = -2$.

Man nennt eine Funktion $f : A \longrightarrow B$

1. **injektiv** (oder eineindeutig), wenn aus $x_1, x_2 \in A$ und $x_1 \ne x_2$ stets $f(x_1) \ne f(x_2)$ folgt,
2. **surjektiv**, wenn für jedes $y \in B$ ein $x \in A$ existiert, so dass $f(x) = y$ gilt,
3. **bijektiv**, wenn $f : A \longrightarrow B$ injektiv und bijektiv ist.

Bei einer bijektiven Funktion $f : A \longrightarrow B$ ist also über die Vorschrift $y = f(x)$ jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ zugeordnet und umgekehrt. Eine solche Funktion $f : A \longrightarrow B$ besitzt damit eine Umkehrfunktion $f^{-1} : B \longrightarrow A$ (d.h. $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$). Diese ist auch durch die Beziehungen $f^{-1}(f(x)) = x\ \forall\, x \in A$ und $f(f^{-1}(y)) = y\ \forall\, y \in B$ charakterisiert. Der Graph von f^{-1} ergibt sich durch Spiegelung des Graphen von f an der Geraden $y = x$.

Beispiel 0.4 *Da die Funktion* $f : [0, \infty) \longrightarrow (0, 1]\,,\ x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ *streng monoton fallend ist und* $f([0, \infty)) = (0, 1]$ *gilt, existiert die Umkehrfunktion. Löst man die Gleichung*

$$y = \frac{1}{1+x^2}\,, \quad x \in [0, \infty)\,,$$

nach x *auf, so erhält man* $x = \sqrt{\dfrac{1}{y} - 1}$ *und somit die Umkehrfunktion* $f^{-1} : (0, 1] \longrightarrow [0, \infty)\,,$ $x \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{x} - 1}\,.$

Definition 0.5 $a^* \in \mathbb{R}$ *oder* $a^* = \pm\infty$ *heißt* **Grenzwert** *der Funktion* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *im Punkt* $x^* \in \mathbb{R}$ *oder in* $x^* = \pm\infty$ *(in Zeichen:* $\lim\limits_{x \to x^*} f(x) = a^*$*), wenn aus* $x_n \in A \setminus \{x^*\}\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$ *und* $x_n \longrightarrow x^*$ *stets* $f(x_n) \longrightarrow a^*$ *folgt.*

Beispiel 0.6 *Für die Funktion* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ *gilt* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0\,.$

Definition 0.7 *Die Funktion* $f : A \longrightarrow B$ *heißt im Punkt* $x^* \in A$ *stetig, wenn sie in diesem Punkt einen Grenzwert besitzt und dieser mit dem Funktionswert übereinstimmt, d.h.*

$$\lim_{x \to x^*} f(x) = f(x^*)\,.$$

Die Funktion $f : A \longrightarrow B$ *nennt man stetig, wenn sie in jedem Punkt* $x^* \in A$ *stetig ist.*

Aus den Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten von Zahlenfolgen ergibt sich, dass aus der Stetigkeit zweier Funktionen $f : A \longrightarrow B$ und $g : A \longrightarrow B$ auch die Stetigkeit der Summe, der Differenz und des Produktes sowie im Fall $g(x) \neq 0\,,\ x \in A\,,$ auch des Quotienten dieser Funktionen folgt. Auch die Verkettung zweier stetiger Funktionen ist wieder stetig.

Satz 0.8 (Zwischenwertsatz für stetige Funktionen) *Es seien* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und* $f(a) < f(b)$ *(bzw.* $f(a) > f(b)$*). Dann existiert für jedes* $c \in (f(a), f(b))$ *(bzw.* $c \in (f(b), f(a))$*) ein* $\xi \in (a, b)$ *mit* $f(\xi) = c\,.$

Satz 0.9 *Sei* $-\infty < a < b < \infty\,.$ *Ist* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig, so existieren* $x_{\min} \in [a, b]$ *und* $x_{\max} \in [a, b]$ *mit der Eigenschaft*

$$f(x_{\min}) \le f(x) \le f(x_{\max}) \quad \forall\, x \in [a, b]\,.$$

0.3.1 Potenzfunktionen

Wir betrachten für eine gegebene reelle Zahl b die Funktion $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto x^b\,.$

1. Für $b = n \in \mathbb{N}\,,\ n > 1\,,$ ist f streng monoton wachsend, streng konvex, nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt. Die strenge Konvexität ergibt sich für $n = 2$ wegen $2x_1x_2 < x_1^2 + x_2^2$ aus

$$\left[\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right]^2 = \frac{1}{4}(x_1^2 + 2\,x_1x_2 + x_2^2) < \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\,.$$

Für beliebige $n \geq 2$ kann man den binomischen Satz verwenden. Nach diesem gilt nämlich

$$\left(\frac{1}{2}+x\right)^n + \left(\frac{1}{2}-x\right)^n > \frac{1}{2^{n-1}}\,,$$

falls $x \neq 0$. Für $x = \dfrac{x_1}{x_1+x_2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x_2}{x_1+x_2}$ ergibt sich daraus

$$\left(\frac{x_1}{x_1+x_2}\right)^n + \left(\frac{x_2}{x_1+x_2}\right)^n > \frac{1}{2^{n-1}}\,,$$

also

$$\frac{1}{2}(x_1^n + x_2^n) > \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^n .$$

2. Für $b = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, definieren wir $y = x^b$ als die positive Zahl, für die $x = y^n$ gilt. In diesem Fall ist f ebenfalls streng monoton wachsend, nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt, aber streng konkav, was sich wegen der strengen Konvexität im Fall $b = n$ aus

$$\left[\frac{1}{2}\left(x_1^{\frac{1}{n}} + x_2^{\frac{1}{n}}\right)\right]^n < \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

ergibt.

3. Für $b = n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, ist f streng monoton fallend, nach unten beschränkt, nach oben unbeschränkt und konvex, wobei x^b als $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-b}$ definiert ist.

4. Man kann nun x^b für $b = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) als $(x^m)^{\frac{1}{n}}$ definieren. Unter Verwendung der oben erwähnten Monotonieeigenschaften und des Intervallschachtelungsprinzips lässt sich x^b auch für beliebige $b \in \mathbb{R}$ erklären. Insbesondere erhält man für $b > 1$ strenges monotones Wachstum und strenge Konvexität, d.h. ein überproportionales Wachstum, und für $0 < b < 1$ strenges monotones Wachstum und strenge Konkavität, d.h. unterproportionales Wachstum.

Die hier betrachteten Funktionen $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^b$ sind sämtlich stetige Funktionen. Eine Funktion der Gestalt $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, wobei $a_k \in \mathbb{R}$ gegebene Zahlen sind, nennt man **Polynom**. Ist dabei $a_n \neq 0$, so heisst n der **Grad** des Polynoms $p(x)$ (in Zeichen: $n = \deg p(x)$).

0.3.2 Die Exponentialfunktion

Die sog. **Eulersche Zahl** e kann man als Summe der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

definieren. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto e^x$ ist dann gegeben durch

$$\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,.$$

Wir listen einige Eigenschaften dieser Funktion auf:

1. $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend, wobei $e^x > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ und $e^0 = 1$ gilt.
2. $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0\,,\ \lim_{x\to\infty} e^x = \infty\,.$
3. $e^{x+y} = e^x e^y$ (Potenzgesetz)
4. $\exp'(x) = \exp(x)$ (siehe Abschnitt 0.5).

0.3.3 Die Logarithmusfunktion

Die Logarithmusfunktion (auch natürlicher Logarithmus genannt) $\ln : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \ln(x)$ ist die Umkehrfunktion zu $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)\,.$ (Für ln schreibt man auch log .) Es gilt also $y = \ln(x)$ genau dann, wenn $x = e^y\,.$ Hier die der Exponentialfunktion entsprechenden Eigenschaften:

1. $\ln : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend, wobei $\ln(1) = 0$ gilt.
2. $\lim_{x\to+0} \ln(x) = -\infty\,,\ \lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty\,.$
3. $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)\,,\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)\,.$
4. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ (siehe Abschnitt 0.5).

Weiterhin gilt für $a > 0$:

5. $a^x = e^{x\ln(a)}\,.$

0.3.4 Winkelfunktionen

Ist (x, y) ein Punkt auf dem Einheitskreis der x-y-Ebene, d.h. auf dem Kreis um den Koordinatenursprung mit dem Radius 1, so dass die Länge des Bogens vom Punkt $(1, 0)$ zum Punkt (x, y) gleich α ist, so definiert man die Funktionen $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $\cos(\alpha) := x$ und $\sin(\alpha) := y\,.$

1. $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1\ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\,.$
2. 2π-Periodizität: $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)\,,\ \sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)\ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\,.$
3. $\cos(\alpha) = 0 \iff \alpha \in N_{\cos} := \left\{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}\,,$
   $\sin(\alpha) = 0 \iff \alpha \in N_{\sin} := \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}\,.$
4. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)\ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\,.$

5. $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

6. $\cos'(\alpha) = -\sin(\alpha)$, $\sin'(\alpha) = \cos(\alpha)$.

Die Tangens- und die Kotangensfunktion kann man nun wie folgt definieren:

- $\tan : \mathbb{R} \setminus N_{\cos} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ \alpha \mapsto \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
- $\cot : \mathbb{R} \setminus N_{\sin} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ \alpha \mapsto \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

(Für $\cos(\alpha)$, ... schreibt man oft auch nur $\cos\alpha$, ... !) Einige Eigenschaften dieser Funktionen:

1. $\tan(\alpha+\pi) = \tan(\alpha)$, $\cot(\alpha+\pi) = \cot(\alpha)$.

2. $\lim_{\alpha\to\pm\frac{\pi}{2}\mp 0} \tan(\alpha) = \pm\infty$,

3. $\lim_{\alpha\to+0} \cot(\alpha) = +\infty$, $\lim_{\alpha\to\pi-0} \cot(\alpha) = -\infty$.

4. $\tan'(\alpha) = \dfrac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$, $\cot'(\alpha) = -\dfrac{1}{\sin^2(\alpha)} = -1 - \cot^2(\alpha)$.

Die Funktionen $\cos : (0,\pi) \longrightarrow (-1,1)$ und $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ sind bijektiv. Die entsprechenden Umkehrfunktionen werden mit $\arccos : (-1,1) \longrightarrow (0,\pi)$ und $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ bezeichnet.

0.4 Übungsaufgaben

1. Ermitteln Sie die Grenzwerte und diskutieren Sie die unterschiedliche Annäherung der Folgen an diese Grenzwerte:

   (a) $x_n = \dfrac{1}{n}$, (b) $x_n = -\dfrac{1}{n}$, (c) $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$,

   (d) **(HA)** $x_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n}$, (e) **(HA)** $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$.

2. Geben Sie $a \in \mathbb{R}$ und $N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, an, so dass $|x_n - a| < \varepsilon \ \ \forall\, n > N(\varepsilon)$ gilt.

   (a) $x_n = \dfrac{n}{n^3+n^2+1}$, (b) **(HA)** $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, (c) $x_n = \dfrac{1+\sqrt{n}}{n^3}$, (d) $x_n = \dfrac{\sin n}{2+\sqrt[3]{n^5}}$,

   (e) **(HA)** $x_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}$, (f) **(HA)** $x_n = \dfrac{1}{n^2}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

3. Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} x_n$:

   (a) $x_n = \dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n+4}$, (b) **(HA)** $x_n = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$, (c) $x_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+2}}$,

   (d) **(HA)** $x_n = (n+1)^k - n^k$, $0 < k < 1$, (e) $x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$,

   (f) $x_n = \sqrt[n]{3^n+2^n}$, (g) **(HA)** $x_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}$, (h) $x_n = \dfrac{\log_a n}{n}$, $a > 1$,

(i) **(HA)** $x_n = \dfrac{3n^2 + \sqrt{n^3+2}}{n^2 - n + 1}$, (j) $x_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$,

(k) **(HA)** $x_n = \dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{n+2} - \dfrac{n}{2}$, (l) **(HA)** $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n} - n}$,

(m) $x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$, (n) **(HA)** $x_n = \sqrt{n^2+n} - n$,

(o) **(HA)** $x_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$.

4. **(HA)** Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ genau dann gilt, wenn $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$ ist.

5. Zeigen Sie, dass aus der Konvergenz der Zahlenfolgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ die Konvergenz der Zahlenfolge $(\max\{x_n, y_n\})_{n=1}^{\infty}$ folgt.

6. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion

   (a) **(HA)** die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n+1} n^2 = \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2},$$

   (b) die Summenformel für $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

7. Schreiben Sie den Term $(x-y)^5$ als Summe von Produkten von Potenzen von x und y.

8. **(HA)** Berechnen Sie den Koeffizienten vor a^{15} in $(1+a)^{20}$.

9. Beweisen Sie

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, (b) **(HA)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

10. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 6 \cdot (2n)} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

    gilt.

11. Beweisen Sie für $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ die Gültigkeit der Ungleichung

$$(1+\lambda)^n > \frac{(n\lambda)^2}{4}.$$

0.5 Der Begriff der Ableitung

Die Lösung verschiedenster Probleme führt auf den Begriff der Ableitung einer Funktion. Im folgenden seien exemplarisch drei solche Aufgabenstellungen vorgestellt:

1. Ein geometrisches Problem

   Es sei der Anstieg der Tangente an den Graphen $\{(x, f(x)) : a < x < b\}$ einer Funktion $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ gesucht, wobei x_0 ein Punkt aus dem Intervall (a, b) sei. Da der Anstieg der Geraden durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, wobei $x_0 + h \in (a, b)$ erfüllt sei, gleich dem **Differenzenquotienten**

   $$\frac{f(x_0 + h)) - f(x_0)}{h}$$

   ist, kann man den Anstieg der Tangente als den Grenzwert dieses Differenzenquotienten für $h \longrightarrow 0$ definieren, falls dieser existiert. Diesen Grenzwert nennt man dann Ableitung der Funktion f im Punkt x_0 und bezeichnet ihn mit $f'(x_0)$.

2. Ein physikalisches Problem

   Es sei der Ort $s(t)$ eines sich geradlinig bewegenden Punktes in Abhängigkeit von der Zeit t gegeben und seine (Momentan-)Geschwindigkeit $v(t)$ zum Zeitpunkt t gesucht. Da man als mittlere Geschwindigkeit des Punktes im Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$ den Differenzenquotienten

   $$\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

   ansehen kann, ist die Geschwindigkeit des Punktes zum Zeitpunkt t gleich dem Grenzwert dieses Differenzenqotienten für $\Delta t \longrightarrow 0$ zu setzen, also $v(t) = s'(t)$.

3. Ein einfaches Populationsmodell

   Mit $P(t)$ sei die (unbekannte) Größe einer Population zum Zeitpunkt t bezeichnet, wobei die Größe $P_0 = P(0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben sei. Nach welchem Gesetz könnte man $P(t)$ für $t > 0$ voraussagen. Um ein solches Gesetz zu finden, nehmen wir an, dass die Zunahme der Population in einem Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ proportional zur Länge des Zeitintervalls und zur Größe der Population ist. Den entsprechenden Proportionalitätsfaktor nennt man Geburtenrate, wir bezeichnen ihn mit k. Es folgt also

   $$P(t + \Delta t) - P(t) \approx k\, P(t)\Delta t$$

   bzw.

   $$\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} \approx k\, P(t) .$$

   Es ist anzunehmen, dass diese ungefähre Gleichheit für $\Delta t \longrightarrow 0$ in eine Gleichheit übergeht. Wir erhalten also eine sogenannte Differentialgleichung

   $$P'(t) = k\, P(t) ,$$

d.h. eine Gleichung für die gesuchte Funktion $P(t)$, in der auch die Ableitung $P'(t)$ der gesuchten Funktion vorkommt. Diese Funktion hat zusätzlich die Bedingung $P(0) = P_0$ zu erfüllen. Bekanntlich ist $P(t) = P_0 e^{k\,t}$ die einzige Lösung dieses Problems. Offenbar ist dieses Modell ein sehr einfaches, was auch dadurch zum Ausdruck kommt, dass nur folgende drei qualitativ unterschiedlichen Entwicklungsgesetze der Population möglich sind:

(a) Konstante Population für alle Zeiten. ($k = 0$)

(b) Die Population stirbt (exponentiell) aus für $t \longrightarrow \infty$. ($k < 0$)

(c) Die Population wächst (exponentiell) für $t \longrightarrow \infty$ über alle Maßen. ($k > 0$)

Eine Verfeinerung dieses Modells, bei der von einer optimalen Populationsgröße $P_{\rm opt}$ (die den vorhandenen Ressourcen entspricht) ausgegangen wird, führt auf die Differentialgleichung

$$P'(t) = k\,P(t)[P_{\rm opt} - P(t)]\,.$$

Definition 0.10 *Die Funktion $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt im Punkt $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar mit der Ableitung $f'(x_0)$, wenn*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R} \tag{0.9}$$

gilt. Sie heißt auf (a,b) differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar ist.

Die Bedingung (0.9) ist äquivalent zu

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)\,.$$

Die Zahl $f'(x_0)$ gibt den Anstieg der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ an den Graphen der Funktion an. Diese Tangente genügt der Geradengleichung

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Offenbar ist die Ableitung einer konstanten Funktion gleich 0.

Beispiel 0.11 *Wir untersuchen die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ für $n \in \mathbb{N}$ auf Differenzierbarkeit. Aus*

$$\frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^{k-1} = n x_0^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x_0^{n-2} h + \cdots + h^{n-1}$$

folgt $f'(x_0) = n x_0^{n-1}$.

Beispiel 0.12 *Offenbar gelten für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ die Ungleichungen*

$$0 < \sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\,,$$

so dass

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

gilt. Unter Verwendung der Stetigkeit von $\cos x$ *und der Beziehung* $\sin(-x) = -\sin x$ ($\sin x$ *ist eine ungerade Funktion) folgt*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,. \tag{0.10}$$

Hieraus folgt für $f(x) = \sin x$ *die Formel* $f'(0) = 1$.

Folgerung 0.13 *Ist* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *in* $x_0 \in (a,b)$ *differenzierbar, so gilt*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + h(x, x_0)(x - x_0) \tag{0.11}$$

mit $\lim\limits_{x\to x_0} h(x, x_0) = 0$, *denn es ist*

$$h(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\,.$$

Die Beziehung (0.11) zeigt, dass f *in* x_0 *stetig ist.*

Folgerung 0.14 (Differentiationsregeln) *Es seien* $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *im Punkt* $x_0 \in (a,b)$ *differenzierbar. Dann sind auch die Funktionen* $\alpha f + \beta g$ *für beliebige* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *und* fg *in* x_0 *differenzierbar, wobei*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

und

$$(f\,g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \quad \text{(Produktregel)}$$

gilt. Ist $g(x_0) \neq 0$, *so ist*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}\,. \quad \text{(Quotientenregel)}$$

Sind $f : (a,b) \longrightarrow (c,d)$ *in* $x_0 \in (a,b)$ *und* $g : (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}$ *in* $f(x_0) \in (c,d)$ *differenzierbar, so ist* $g \circ f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *in* x_0 *differenzierbar, wobei*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) \quad \text{(Kettenregel)}$$

gilt.

Beweis. Den Beweis für diese Regeln gewinnt man aus den Formeln

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\, g(x) + f(x_0)\, \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\,,$$

$$\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,\frac{g(x_0)}{g(x)g(x_0)} - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\,\frac{f(x_0)}{g(x)g(x_0)}$$

und, für $F(x) = g(f(x))$, $y_0 = f(x_0)$ sowie $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$,

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{k}\,\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

unter Anwendung der Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten. □

Satz 0.15 (Ableitung der Umkehrfunktion) *Ist $g : (c,d) \longrightarrow (a,b)$ die Umkehrfunktion zu der auf (a,b) differenzierbaren Funktion $f : (a,b) \longrightarrow (c,d)$ mit $f'(x) \neq 0 \ \forall\, x \in (a,b)$, so ist g auf (c,d) differenzierbar, und es gilt*

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \quad \forall\, x \in (c,d)\,. \tag{0.12}$$

Die Formel (0.12) ergibt sich aus $f(g(x)) = x$ und der Kettenregel. (Der Beweis der Differenzierbarkeit von g muss aber vorher geführt werden!)

Beispiel 0.16 *Wir betrachten die Funktionen aus dem Abschnitt 0.3.1 und verwenden die Formel aus Bsp. 0.11:*

1. $m \in \mathbb{N}\,,\ f(x) = x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}\,,\ x_0 \neq 0$: *Aus der Quotientenregel folgt*

$$f'(x_0) = -\frac{m x_0^{m-1}}{x_0^{2m}} = (-m)x_0^{-m-1}\,.$$

2. $n \in \mathbb{N}$: *Die Funktion $g(x) = x^{\frac{1}{n}}\,,\ x > 0$, ist die Umkehrfunktion zu $f(x) = x^n\,,\ x > 0$. Aus Satz 0.15 folgt somit*

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(g(x_0))} = \frac{1}{n\left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n x_0^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} x_0^{\frac{1}{n}-1}\,.$$

3. $r = \dfrac{m}{n}\,,\ m \in \mathbb{Z}\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ f(x) = x^r = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m\,,\ x > 0$: *Aus der Kettenregel folgt*

$$f'(x_0) = m\left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \frac{1}{n} x_0^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x_0^{\frac{m-1}{n}+\frac{1}{n}-1} = r x_0^{r-1}\,.$$

4. *Um diese Formel auch für beliebige $r \in \mathbb{R}$ zu beweisen, gehen wir wie folgt vor:*

   (a) *Es ist bekannt, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ gilt. Unter Verwendung dieser Beziehung kann man zeigen, dass $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ gilt, woraus man wegen der Stetigkeit der Potenzfunktion $x \mapsto x^b$ auch*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{b}{n}\right)^{\frac{n}{b}}\right]^b = e^b \quad \forall\, b \in \mathbb{R}$$

   erhält.

   (b) *Es folgt für $x > 0$ wegen der Stetigkeit der Logarithmusfunktion*

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\ln\left[(1+h)^{\frac{1}{h}}\right] = \ln e = 1\,.$$

   Die Funktion $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \ln x$, ist also im Punkt $x_0 = 1$ differenzierbar, wobei $f'(1) = 1$ gilt.

(c) *Für einen beliebigen Punkt* $x_0 > 0$ *erhalten wir*

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x_0+h) - \ln x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}} \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0}\,.$$

(d) *Aus der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion erhalten wir für* $g(x) = e^x$

$$g'(x_0) = \frac{1}{\frac{1}{g(x_0)}} = e^{x_0}\,.$$

(e) *Wir schreiben* $h(x) = x^r = e^{r\ln x}$, $x > 0$, *und erhalten aus der Kettenregel*

$$h'(x_0) = e^{r\ln x_0}\, r\, \frac{1}{x_0} = r x_0^{r-1}\,.$$

Beispiel 0.17 *Aus* $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ *und der Stetigkeit der Sinusfunktion folgt*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \sin\frac{x}{2} = 0\,,$$

d.h. für $f(x) = \cos x$ *gilt* $f'(0) = 0$. *Aus dem Additionstheorem*

$$\sin x = \sin(x - x_0)\cos x_0 + \cos(x - x_0)\sin x_0$$

sowie der Produkt- und der Kettenregel folgt somit für $g(x) = \sin x$

$$g'(x_0) = g'(0)\cos x_0 + f'(0)\sin x_0 = \cos x_0\,.$$

Analog zeigt man $f'(x_0) = -\sin x_0$.

0.6 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz 0.18 (Fermat) *Ist* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *differenzierbar, so folgt aus* $x_0 \in (a,b)$ *und* $f(x) \le f(x_0)$ *(bzw.* $f(x) \ge f(x_0)$*)* $\forall\, x \in (a,b)$, *dass* $f'(x_0) = 0$ *gilt.*

Beweis. Wäre z.B. $f'(x_0) > 0$, so würde aus der Definition der Ableitung $f'(x_0)$ die Existenz eines $\delta > 0$ folgen, so dass für alle $x_1, x_2 \in (a,b)$ mit $x_0 - \delta < x_1 < x_0 < x_2 < x_0 + \delta$ die Relationen

$$f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$$

gelten, was der Voraussetzung widerspricht. □

Satz 0.19 (Rolle) *Ist* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und auf* (a,b) *differenzierbar sowie* $f(a) = f(b)$, *so existiert ein* $c \in (a,b)$ *mit* $f'(c) = 0$.

Beweis. Nach Satz 0.9 existieren $x_{\min}, x_{\max} \in [a,b]$ mit $m := f(x_{\min}) \le f(x) \le f(x_{\max}) =: M$ $\forall\, x \in [a,b]$. Ist $m = M$, so ist $f \equiv \text{const}$ und somit der Satz richtig. Ist $m < M$, so liegt wenigstens einer der Punkte $x_{\min}$ und $x_{\max}$ im offenen Intervall (a,b), da $f(a) = f(b)$. Der Satz von FERMAT liefert die Behauptung. □

Satz 0.20 (1. und 2. MWS der Differentialrechnung) *Es seien $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige und auf (a,b) differenzierbare Funktionen mit $g'(x) \neq 0$ $\forall\, x \in (a,b)$. Dann existieren $\xi, \eta \in (a,b)$, so dass*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) \quad \textit{und} \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}\,.$$

Beweis. Wir wenden auf die Funktion $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ den Satz von ROLLE an und erhalten die Existenz eines $\xi \in (a,b)$ mit $F'(\xi) = 0$, wobei

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

gilt. Ebenfalls aus dem Satz von ROLLE folgt, dass wegen $g'(x) \neq 0$ $\forall\, x \in (a,b)$ die Beziehung $g(a) \neq g(b)$ gilt. Es bleibt nur noch der Satz von ROLLE auf die Funktion

$$G(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x) - g(a)]$$

anzuwenden. □

0.7 Anwendungen der Differentialrechnung

0.7.1 Die l'Hospitalsche Regel

Die reellen Funktionen f und g seien in $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar, und es sei $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Aus der Definition der Ableitung folgt dann

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \, \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\,,$$

falls $g'(x_0) \neq 0$. Diese Überlegungen lassen sich zu folgendem Satz weiter verallgemeinern. Wir schreiben "$x \longrightarrow a+0$" für "$x \longrightarrow a$ und $x > a$" sowie "$x \longrightarrow b-0$" für "$x \longrightarrow b$ und $x < b$".

Satz 0.21 (L'HOSPITAL) *Es seien $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und*

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = \lim_{x \to b-0} g(x) = 0$$

($b = +\infty$ ist zugelassen). Dann gilt

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

falls der rechte Grenzwert existiert oder gleich $\pm\infty$ ist. (Für $x \to a+0$ gilt eine analoge Aussage.)

Beispiel 0.22

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0\,.\end{aligned}$$

0.7.2 Taylorsche Formel und Taylorentwicklung

Ist $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ auf (a,b) differenzierbar, so nennen wir die Ableitung der Funktion

$$f' : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto f'(x)$$

die **zweite Ableitung** der Funktion f und bezeichnen sie mit

$$f'' : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto f''(x) := (f')'(x)\,.$$

Allgemein ist die k**-te Ableitung** von f die erste Ableitung der $(k-1)$-ten Ableitung von f, d.h. $f^{(k)} := (f^{(k-1)})'$. Die k-te Ableitung von f bezeichnet man auch mit $\dfrac{d^k f}{dx^k}$.

Beispiel 0.23 *Für $f(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}$, gilt*

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} m(m-1)\cdots(m-k+1)x^{m-k} & , \quad k = 1,\ldots,m\,, \\ 0 & , \quad k > m\,. \end{cases}$$

Wir betrachten ein Polynom

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

als Funktion $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto P(x)$. Dann folgt

$$P(0) = a_0\,,\ P'(0) = a_1\,,\ P''(0) = 2a_2\,,\ \ldots\ P^{(n)} = n!\,a_n\,,$$

also

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}\,x^k\,.$$

Schreiben wir $P(x)$ in der Form

$$P(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \cdots + b_n(x-x_0)^n\,,$$

so gilt analog

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\,. \quad \text{(Taylorsche Formel)}$$

Für eine beliebige, genügend oft differenzierbare Funktion $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a,b)$ macht man nun den Ansatz

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(f;x_0,x)\,. \tag{0.13}$$

$R_n(f;x_0,x)$ heißt das **Restglied** bei der **Taylorentwicklung** von f an der Stelle x_0. Unter der Voraussetzung, dass $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ mindestens $n+1$ Mal differenzierbar ist, kann man zeigen, dass für jedes $x\in(a,b)$ ein $\theta\in(0,1)$ existiert, so dass (Restglied nach **Lagrange**)

$$R_n(f;x_0,x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{0.14}$$

gilt. Von besonderem Interesse ist nun der Fall, dass $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist und

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f;x_0,x)=0$$

gilt. Dann folgt nämlich

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\,. \quad \text{(Taylorreihe)} \tag{0.15}$$

Es zeigt sich nun, dass stets ein $r\geq 0$ existiert, so dass die Reihe auf der rechten Seite von (0.15) für $|x-x_0|<r$ konvergiert und für $|x-x_0|>r$ divergiert. Dabei kann auch $r=\infty$ sein. Für $|x-x_0|=r$ ist sowohl Konvergenz als auch Divergenz möglich.

Beispiel 0.24 *Es gelten folgende Taylorreihenentwicklungen:*

1. $e^x=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\cdots\,,\quad x\in\mathbb{R}$

2. $\sin x=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,x^{2k+1}=x-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\cdots\,,\quad x\in\mathbb{R}$

3. $\cos x=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\,x^{2k}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4}-\cdots\,,\quad x\in\mathbb{R}$

4. $\ln(1+x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\,,\quad x\in(-1,1]\,.$

   Speziell erhält man also

   $$\ln 2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\,. \quad \text{(Leibniz – Reihe)}$$

5. $\alpha\in\mathbb{R}$:

   $$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k\,,\quad |x|<1\,. \quad \text{(binomische Reihe)}$$

0.7.3 Die Leibnizsche Formel

Nach der Produktregel ist

$$(f\,g)' = f'g + f\,g'\,.$$

Es folgt

$$(f\,g)'' = (f'g + f\,g')' = f''g + 2\,f'g' + f\,g''\,.$$

Mittels vollständiger Induktion zeigt man, dass

$$(f\,g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} \quad \text{(Leibnizsche Formel)}$$

gilt.

Beispiel 0.25 *Wir wollen* $f(x) = \arctan x$ *im Punkt* $x_0 = 0$ *entwickeln. Dazu brauchen wir eine Formel für* $f^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *Die Beziehung* $y = f(x)$, $-\infty < x < \infty$, *ist äquivalent zu* $x = g(y) := \tan y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. *Es folgt*

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}\,,$$

also

$$1 = f'(x)(1 + x^2)\,.$$

Auf beiden Seiten dieser Gleichung bilden wir unter Verwendung der Leibnizschen Formel die n*-te Ableitung,* $n = 1, 2, \ldots$:

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)}(x) \frac{d^k(1 + x^2)}{dx^k} = f^{(n+1)}(x)(1 + x^2) + n f^{(n)}(x) \cdot 2\,x + n(n-1) f^{(n-1)}(x)\,.$$

Damit wird $f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)f^{(n-1)}(0)$. *Aus* $f(0) = 0$ *folgt somit* $f^{(2n)}(0) = 0$ *für alle* $n = 0, 1, 2, \ldots$, *und* $f^{(2n+1)}(0) = -2n(2n-1)f^{(2n-1)}(0)$, *so dass mit* $f'(0) = 1$ *die Formel*

$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n (2n)!$$

folgt. Untersucht man außerdem das Restglied in der Taylorentwicklung, so folgt schließlich

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, x^{2k+1}\,, \quad x \in (-1, 1]\,.$$

Für $x = 1$ *erhalten wir*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Praktisch berechnet man aber π *nicht mit dieser Formel, da die Reihe zu langsam konvergiert. Aus*

$$\frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \tan(x + y)$$

folgt mit $t := \tan x$ *und* $s := \tan y$

$$\arctan \frac{t+s}{1-t\,s} = \arctan t + \arctan s\,.$$

Für $t = \dfrac{120}{119}$ *und* $s = -\dfrac{1}{239}$ *ist* $\dfrac{t+s}{1-ts} = 1$, *also*

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{120}{119} - \arctan\frac{1}{239} = \arctan\frac{\frac{5}{12}+\frac{5}{12}}{1-\frac{5}{12}\frac{5}{12}} - \arctan\frac{1}{239} = 2\arctan\frac{5}{12} - \arctan\frac{1}{239}\,.$$

Für die nun zu berechnenden Werte $\arctan x$ *lässt sich die Taylorreihe gut verwenden, da diese für kleine* $|x|$ *schnell konvergiert.*

0.7.4 Lokale und globale Extremwerte (Kurvendiskussion)

Ist $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Extremum der Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, so folgt aus dem Satz von FERMAT (Satz 0.18), dass, falls f in x_0 differenzierbar ist, $f'(x_0) = 0$ gilt. **Extremwertverdächtige Punkte** der Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sind somit

- Punkte $x \in (a,b)$ mit $f'(x) = 0$,
- die Randpunkte $x = a$ und $x = b$,
- Punkte $x \in (a,b)$, in denen f nicht differenzierbar ist.

Die globalen Extrema der Funktion f erhält man dann durch Vergleich der Werte $f(x)$ für alle extremwertverdächtigen Punkte $x \in [a,b]$.

Beispiel 0.26 *Für die Funktion* $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x| + \sin x$, *gilt*

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \cos x & , \quad x > 0\,, \\ -1 + \cos x & , \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Die Menge der extremwertverdächtigen Punkte ist somit gleich

$$\left\{-\frac{\pi}{2}, 0, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

mit

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1\,, \quad f(0) = 0\,, \quad f(\pi) = \pi\,, \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - 1\,.$$

Somit sind $0 = f(0)$ *globales Minimum und* $\dfrac{3\pi}{2} - 1 = f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$ *globales Maximum.*

Bemerkung 0.27 *Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist lediglich eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums, aber nicht hinreichend, wie das Beispiel $f(x) = x^3$ für $x_0 = 0$ zeigt. Ist f'' in x_0 stetig, so zeigt die Beziehung (vgl. (0.13) und (0.14))*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^2 , \quad \theta \in (0,1) ,$$

dass $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$ eine hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum ist, und zwar ist im Fall $f''(x_0) < 0$ der Punkt x_0 Stelle eines lokalen Maximums, im Fall $f''(x_0) > 0$ Stelle eines lokalen Minimums.

Bemerkung 0.28 *Ist nun $f^{(m+1)}$ im Punkt x_0 stetig und*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(m)}(x_0) = 0 , \; f^{(m+1)}(x_0) \neq 0 ,$$

so gilt

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^{m+1} , \quad \theta \in (0,1) .$$

Ist also m ungerade, so liegt ein lokales Extremum im Punkt x_0 vor, für gerades m dagegen nicht. Einfachste Beispiele sind die Funktionen $f(x) = x^{m+1}$.

Bemerkung 0.29 *Aus der geometrischen Interpretation der Konvexitätseigenschaft ergibt sich, dass $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ streng konvex (bzw. konkav) ist, wenn der Anstieg $s(x_1, x_2)$ der Geraden durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$*

$$s(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

für jedes feste $x_1 \in (a, b)$ bzgl. $x_2 \in (a, b)$ streng monoton wachsend (bzw. fallend) ist. Ist $f''(x) > 0$ (< 0) für $x \in (a, b)$, so bedeutet dies, dass $f' : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (fallend) ist. Hieraus folgt die strenge Konvexität (Konkavität) von $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Punkte, in denen das Krümmungsverhalten wechselt, nennt man **Wendepunkte***.*

Beispiel 0.30 *Wir wollen uns eine möglichst genaue Vorstellung vom Graphen der Funktion*

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1,\, 3\} \longrightarrow \mathbb{R} , \quad x \mapsto \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x + 1)(x + 2)}{(x - 1)(x - 3)}$$

erarbeiten (Kurvendiskussion). Wir berechnen dazu

$$f'(x) = \frac{-7x^2 + 2x + 17}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

und erhalten als Nullstellen der Ableitung (d.h. als Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$) die Zahlen

$$x_{1,2} = \frac{1}{7} \pm \frac{2}{7} \sqrt{30} ,$$

die also extremwertverdächtige Punkte sind. Aus $5 < \sqrt{30} < 6$ folgt

$$\frac{11}{7} < x_1 < \frac{13}{7} \quad \text{und} \quad -\frac{11}{7} < x_2 < -\frac{9}{7} .$$

Als weitere Hilfsmittel benutzen wir

- *die Grenzwerte im Unendlichen*
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1\,,$$

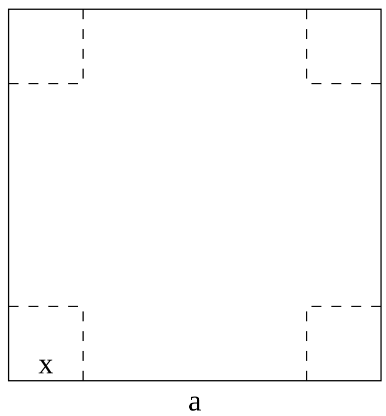
- *das Verhalten an den Polstellen* $x_{P1} = 1$ *und* $x_{P2} = 3$
$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 3+0} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 3-0} f(x) = -\infty\,,$$

- *die Nullstellen, d.h. die Lösungen der Gleichung* $f(x) = 0\,,$
$$x_{N1} = -1\,, \quad x_{N2} = -2\,,$$

- *den Schnittpunkt* $(0, f(0))$ *des Graphen mit der* y*-Achse, also*
$$\left(0, \frac{2}{3}\right)\,.$$

- *Gegebenenfalls kann man noch die Funktionswerte in den extremwertverdächtigen Punkten berechnen oder auch mittels der zweiten Ableitung das Krümmungsverhalten bestimmen.*

Beispiel 0.31 *Aus einem quadratischen Blech ist eine oben offene Schachtel mit größtmöglichem Volumen herzustellen:*



1. $a > 0$ *sei die Seitenlänge des quadratischen Bleches und* $x > 0$ *die Seitenlänge der an den vier Ecken auszuschneidenden Quadrate.*

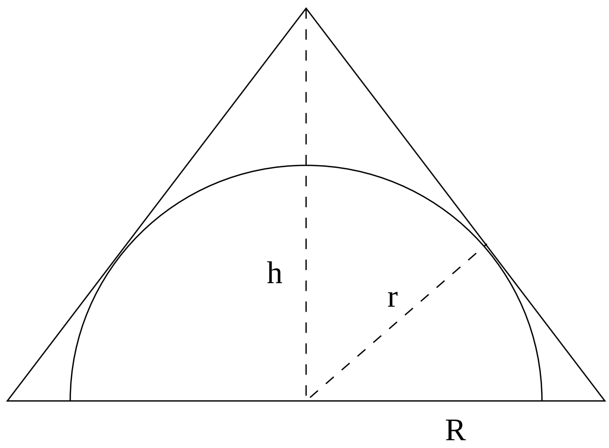
2. *Das Volumen der Schachtel ist dann gleich* $V(x) = (a-2x)^2 x\,,\ x \in \left[0, \frac{a}{2}\right]\,.$

3. $V'(x) = (a-2x)^2 - 4(a-2x)x = (a-2x)(a-6x)\,.$

4. $V'(x) = 0\,,\ x \in \left(0, \frac{a}{2}\right) \iff x = x_0 = \frac{a}{6}\,.$

5. $V(x_0) = \frac{4}{54}\,a^3$ *ist globales Maximum, da* $V(0) = V\left(\frac{a}{2}\right) = 0$ *gilt.*

Beispiel 0.32 *Um eine Halbkugel vom Radius $r > 0$ ist ein gerader Kreiskegel kleinsten Volumens zu beschreiben:*



1. *$R > 0$ sei der Radius der Grundfläche des gesuchten Kreiskegels, $h > 0$ seine Höhe und $\varphi > 0$ der Winkel (in der Spitze des Kreiskegels) zwischen Höhe und Seitenlinie.*

2. *Dann gilt $R = \dfrac{r}{\cos\varphi}$, $h = \dfrac{r}{\sin\varphi}$, und das Volumen des Kreiskegels ist gleich*

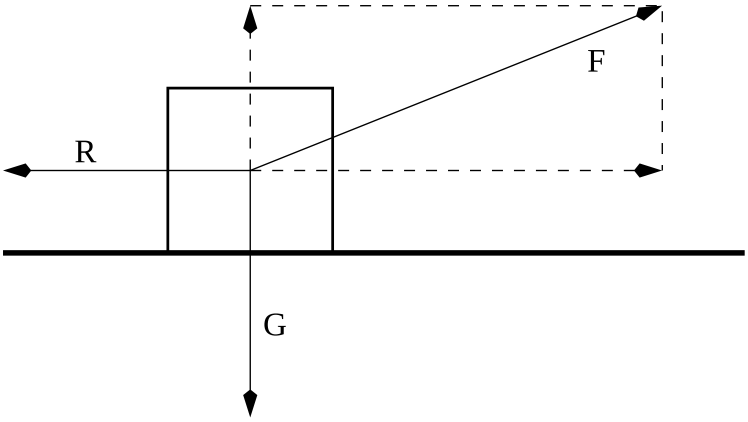
$$\frac{1}{3}\,\pi R^2 h = \frac{1}{3}\,\pi \frac{r^3}{\cos^2\varphi\,\sin\varphi} =: V(\varphi)\,, \quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\,.$$

Es ist also die Funktion $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ \varphi \mapsto \cos^2\varphi\,\sin\varphi$ zu maximieren.

3. *$f'(\varphi) = -2\cos\varphi\sin^2\varphi + \cos^3\varphi = 2\cos^3\varphi\left(\frac{1}{2} - \tan^2\varphi\right)$, d.h. $\varphi_0 = \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist extremwertverdächtiger Punkt.*

4. *Wegen $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ und $f(\varphi_0) > 0$ ist $f(\varphi_0)$ wirklich globales Maximum von $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}\,.$*

Beispiel 0.33 *Eine Last vom Gewicht G, die auf einer horizontalen Ebene liegt, soll durch Einwirkung einer Kraft verschoben werden. Unter welchem Winkel $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ zur Horizontalen muss diese Kraft angreifen, wenn sie möglichst klein sein soll? Gegeben sei dabei der Reibungskoeffizient μ.*



1. *F sei der Betrag der angreifenden Kraft. In Richtung der Horizontalen wirkt dann die Kraft $F\cos\theta$, welche die Reibungskraft $R = \mu(G - F\sin\theta)$ zu überwinden hat. Um die Last fortzubewegen, ist also die Bedingung*
$$F\cos\theta > \mu(G - F\sin\theta)\,, \quad \textit{d.h.} \quad F > \frac{\mu G}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$$
zu erfüllen.
2. *Dies bedeutet, dass die Funktion $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $\theta \mapsto \cos\theta + \mu\sin\theta$ zu maximieren ist.*
3. *Aus der Gleichung $f'(\theta) = \mu\cos\theta - \sin\theta = 0$ erhalten wir den Winkel $\theta_0 = \arctan\mu$, der wegen $f''(\theta_0) = -(\mu\sin\theta_0 + \cos\theta_0) < 0$ auch wirklich das Maximum liefert.*
4. *Für einen Stein, der auf einem Holzbrett zu bewegen ist, gilt $\mu \approx 0.4$ und somit $\theta_0 \approx 22^o$.*

0.7.5 Die Lösung nichtlinearer Gleichungen

Die Methode der sukzessiven Approximation

Man nennt eine Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **beschränkt**, wenn ein $M \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $|a_n| \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (d.h. wenn die Abbildung bzw. Funktion $n \mapsto a_n$ beschränkt ist).

Satz 0.34 *Jede konvergente Zahlenfolge ist beschränkt.*

Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ heisst **Cauchyfolge**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft
$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall\, n, m > N$$
existiert.

Aus der Eigenschaft der Vollständigkeit der Menge der reellen Zahlen (d.h. der Gültigkeit des Intervallschachtelungsprinzips in $\mathbb{R}$) kann man folgende zwei Aussagen ableiten. (Ist $i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $k \mapsto n_k$ eine streng monoton wachsende Funktion, so nennt man $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ eine **Teilfolge** der Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.)

Satz 0.35 *Jede beschränkte Zahlenfolge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Satz 0.36 (Cauchysches Konvergenzkriterium) *Eine Zahlenfolge ist genau dann konvergent, wenn sie Cauchyfolge ist.*

Folgerung 0.37 *Eine monotone Zahlenfolge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.*

Für eine gegebene Funktion $g : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ suchen wir Lösungen der Gleichung

$$x = g(x)\,, \tag{0.16}$$

sog. **Fixpunkte** der Funktion g. Wir verwenden die **Methode der sukzessiven Approximation**

$$x_{n+1} = g(x_n)\,, \quad n = 0,1,2,\ldots\,, \tag{0.17}$$

mit einem Startwert $x_0 \in [a,b]$ und setzen voraus, dass die Funktion g **kontrahierend** ist, d.h. es existiert eine Zahl $q \in (0,1)$ mit der Eigenschaft

$$|g(x) - g(y)| \le q|x-y| \quad \forall\, x,y \in [a,b]\,. \tag{0.18}$$

Wir wollen nun zeigen, dass unter der Voraussetzung (0.18), aus der auch sofort die Stetigkeit der Funktion g folgt, die durch (0.17) definierte Zahlenfolge $(x_n)_{n=1}^\infty$ gegen eine Lösung der Gleichung (0.16) konvergiert. Wir zeigen zuerst, dass $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine Cauchyfolge ist. Dazu seien n und m beliebige natürliche Zahlen. Aus (0.17) und (0.18) folgt

$$|x_{n+1} - x_n| = |g(x_n) - g(x_{n-1})| \le q|x_n - x_{n-1}| \le q^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \le \cdots \le q^n|x_1 - x_0|$$

und somit

$$\begin{aligned} |x_{n+m} - x_n| &\le |x_{n+m} - x_{n+m-1}| + |x_{n+m-1} - x_{n+m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\le \left(q^{n+m-1} + q^{n+m-2} + \cdots + q^n\right)|x_1 - x_0| \\ &= q^n \frac{1-q^m}{1-q}\,|x_1 - x_0| \le \frac{q^n}{1-q}\,|x_1 - x_0|\,. \end{aligned} \tag{0.19}$$

Für beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{q^n}{1-q}\,|x_1 - x_0| < \varepsilon$ und somit $|x_{n+m} - x_n| < \varepsilon$ für alle $n \ge N$ und alle $m \in \mathbb{N}$, d.h. $(x_n)_{n=1}^\infty$ ist Cauchyfolge. Damit existiert $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Aus (0.17) und der bereits erwähnten Stetigkeit der Funktion g folgt für $n \longrightarrow \infty$ die Beziehung $x^* = g(x^*)$, d.h. x^* ist Lösung der Gleichung (0.16). Dabei gilt wegen (0.19) (man betrachte $m \longrightarrow \infty$) die a-priori Abschätzung

$$|x^* - x_n| \le \frac{q^n}{1-q}\,|x_1 - x_0|\,. \tag{0.20}$$

Aus (0.18) folgt auch, dass diese Lösung x^* eindeutig ist. Denn aus $x^* = g(x^*)$ und $y^* = g(y^*)$ folgt $|x^* - y^*| \le q|x^* - y^*|$, also $x^* = y^*$. Wir erhalten somit den folgenden, nach Banach benannten Fixpunktsatz.

Satz 0.38 *Ist $g : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ eine kontrahierende Abbildung, so besitzt die Gleichung (0.16) genau eine Lösung $x^* \in [a,b]$, die für beliebiges $x_0 \in [a,b]$ durch die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ aus (0.17) approximiert werden kann, wobei (0.20) gilt.*

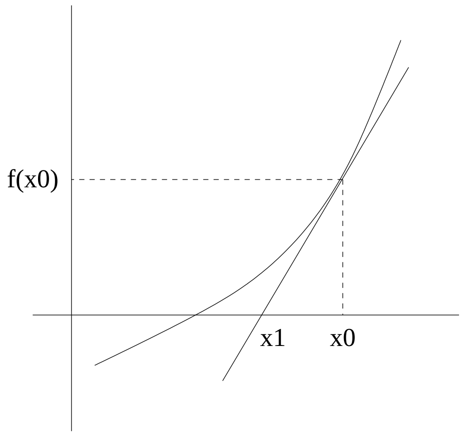
Bemerkung 0.39 *Ist die stetige Funktion $g : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ auf (a,b) differenzierbar mit $|g'(x)| \le q < 1$, $x \in (a,b)$, so genügt sie der Kontraktionsbedingung (0.18). Das folgt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 0.20).*

Das Newtonsche Iterationsverfahren

Für eine gegebene Funktion $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ suchen wir Lösungen der Gleichung

$$f(x) = 0\,, \tag{0.21}$$

d.h. **Nullstellen** der Funktion f. Wir setzen voraus, dass f hinreichend oft differenzierbar ist und verwenden folgende geometrische Überlegung. Es sei $x_0 \in (a,b)$ eine gewisse Näherung für eine Lösung von (0.21).



Die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ hat die Gleichung $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Diese Tangente schneidet die x-Achse im Punkt $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, den wir als neue Näherung für eine Lösung von (0.21) ansehen. Durch wiederholte Anwendung dieser Überlegungen erhalten wir die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots\,, \tag{0.22}$$

die der Methode der sukzessiven Approximation (0.17) für die Funktion

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

entspricht.

1. Wir setzen voraus, dass $f'(x) \neq 0$ für $x \in (a,b)$ erfüllt ist. Es gilt dann

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2}\,,$$

woraus man schließen kann (die Beschränkheit von $f''(x)$ vorausgesetzt), dass für eine hinreichend kleine Umgebung einer Nullstelle von f, sagen wir $U = [x_0 - r, x_0 + r] \subset (a,b)$ mit einem $r > 0$, die Ungleichung

$$|g'(x)| \leq q < 1\,, \quad x \in U\,, \tag{0.23}$$

gilt. Um Bemerkung 0.39 auf die Funktion $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ anwenden zu können, muss auch $g(x) \in U$ für alle $x \in U$ gelten. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung und der Definition von $g(x)$ folgt aber nun für $x \in U$

$$|g(x) - x_0| \leq |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0) - x_0| \leq q|x - x_0| + \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|\,.$$

Setzen wir also voraus, dass

$$\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| \leq (1-q)r \tag{0.24}$$

gilt, so erhalten wir aus Bemerkung 0.39, dass das Newtonverfahren (0.22) für eine Anfangsnäherung $x_0 \in (a,b)$, die (0.23) und (0.24) erfüllt, gegen eine Lösung $x^* \in U$ der Gleichung (0.21) konvergiert. Die Bedingung (0.24) besagt dabei, dass die Startnäherung x_0 hinreichend gut sein muss, und zwar um so besser, je größer die Zahl q in (0.23) ist. Man sagt deshalb, dass das Newtonverfahren i.a. lediglich **lokal konvergent** ist.

2. Wir nehmen an, dass zusätzlich eine Zahl $c_0 > 0$ mit der Eigenschaft $|g''(x)| \leq 2c_0\ \forall\, x \in U$ existiert. Dann folgt wegen

$$\begin{aligned} x_{n+1} = g(x_n) &= g(x^*) + g'(x^*)(x_n - x^*) + \frac{1}{2}g''(x^* + \theta(x_n - x^*))(x_n - x^*)^2 \\ &= x^* + \frac{1}{2}g''(x^* + \theta(x_n - x^*))(x_n - x^*)^2\,, \quad \theta \in (0,1)\,, \end{aligned}$$

die Abschätzung

$$|x_{n+1} - x^*| \leq c_0|x_n - x^*|^2\,,$$

weshalb man das Newtonverfahren in diesem Fall **quadratisch konvergent** nennt.

3. Wir beschreiben hier eine Situation, in der das Newtonverfahren auch global konvergent ist. Die stetige Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ habe die Eigenschaften

   (a) $f'(x) > 0\ \forall\, x \in [a,b]$,

   (b) $f(a)f(b) < 0$,

   (c) $f''(x) > 0\ \forall\, x \in (a,b)$ (Konvexität).

Dann existiert offenbar genau ein $x^* \in (a,b)$ mit $f(x^*) = 0$. Wir setzen $x_0 = b$. Es folgt

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0$$

und

$$\begin{aligned}
x_1 - x^* &= x_0 - x^* - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\
&= -\frac{1}{f'(x_0)}\left[f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0)\right] \\
&= -\frac{1}{f'(x_0)}\left[f(x^*) - \frac{1}{2}f''(x_0 + \theta(x^* - x_0))(x^* - x_0)^2\right] \\
&= \frac{1}{2f'(x_0)}\, f''(x_0 + \theta(x^* - x_0))(x^* - x_0)^2 > 0\,,
\end{aligned}$$

d.h. $x^* < x_1 < x_0$ und $f(x_1) > 0$. Induktiv schließt man also auf $x^* < x_{n+1} < x_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Somit folgt die Existenz des Grenzwertes

$$\overline{x} = \lim_{n\to\infty} x_n\,,$$

wobei aus (0.22) für $n \longrightarrow \infty$ die Beziehung

$$\overline{x} = \overline{x} - \frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})}\,,$$

d.h. $f(\overline{x}) = 0$, und somit $\overline{x} = x^*$ folgt.

Beispiel 0.40 *Wir suchen die Nullstellen der Funktion* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{2} - \sin x$, *d.h. die Lösungen der Gleichung*

$$\frac{x}{2} - \sin x = 0 \quad \textit{bzw.} \quad x = 2\sin x =: g(x)\,.$$

Aus $f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x$ *ergibt sich das Newtonverfahren*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - 2\sin x_n}{1 - 2\cos x_n} = 2\,\frac{\sin x_n - x_n\cos x_n}{1 - 2\cos x_n}\,. \tag{0.25}$$

In den folgenden Tabellen vergleichen wir die Ergebnisse des Newtonverfahrens (0.25) mit denen der sukzessiven Approximation

$$x_{n+1} = 2\sin x_n\,. \tag{0.26}$$

	Sukz. Appr. (0.26)	Newtonverfahren (0.25)
x_0	3.0000000000000000	3.0000000000000000
x_1	0.2822400161197344	2.0879954127013778
x_2	0.5570154662136501	**1.**9122292580258147
x_3	**1.**0573103488340820	**1.895**6526275469130
x_4	**1.**7420748663201644	**1.8954942**815405740
x_5	**1.**9707353101974190	**1.89549426703398**12
x_6	**1.8**421695065410935	**1.8954942670339809**

	Sukz. Appr. (0.26)	Newtonverfahren (0.25)
x_0	0.5000000000000000	**0.**5000000000000000
x_1	0.9588510772084060	**-0.**1076168810751763
x_2	**1.**6370641951729958	**0.000**8396553633925
x_3	**1.**9956101764404637	**-0.000000000**3946501
x_4	**1.8**222309416572313	**0.0000000000000000**

Man sieht die bedeutend schnellere Konvergenz des Newtonverfahrens, welches für verschiedene Startwerte auch verschiedene Lösungen approximieren kann. Die Methode der sukzessiven Approximation kann für $x_0 \neq 0$ die Lösung $x = 0$ nicht approximieren, was auf die Ungleichung $|g'(0)| = 2 > 1$ zurückzuführen ist (vgl. Bem. 0.39).

Beispiel 0.41 *Wir wollen die m-te Wurzel* $(m \in \mathbb{N}\,,\ m \geq 2)$ *aus einer positiven Zahl A ziehen. Die Funktion $f(x) = x^m - A$ ist auf $[0, \infty)$ konvex, und es gilt $f'(x) > 0$ für $x > 0$. Wir haben also auf jedem Intervall $[a, b]$ mit $0 < a < A^{\frac{1}{m}} < b$ eine Situation vorliegen, wie sie oben unter 3. betrachtet wurde. Mit $f'(x) = mx^{m-1}$ liefert das Newtonverfahren die Iterationsvorschrift*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^m - A}{m\, x_n^{m-1}} = \left(1 - \frac{1}{m}\right) x_n + \frac{A}{m\, x_n^{m-1}}\,,$$

im Spezialfall $m = 2$ also

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right).$$

0.8 Übungsaufgaben

1. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \tan x$, (c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0} \tan x$, (d) **(HA)** $\lim\limits_{x\to 0} |x|$,

   (e) **(HA)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \arctan x$, (f) $\lim\limits_{x\to\pm 0} x^{-2}$.

2. Es seien $u : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ und $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion $f(x) = u(x)^{v(x)}$.

3. Ermitteln Sie mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion (Satz 0.15) die Ableitungen der Arkusfunktionen

   (a) $f(x) = \arccos x$, (b) $g(x) = \arcsin x$, (c) **(HA)** $h(x) = \operatorname{arccot} x$.

4. Bestimmen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt x_0 unter direkter Anwendung der Definition 0.10:

   (a) $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$ - fest), (b) $f(x) = a\,x^2$ ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ - fest),

   (c) $f(x) = e^x$, (d) **(HA)** $f(x) = e^{2x}$.

5. Berechnen Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen in $x \in \mathbb{R}$:

   (a) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{x^3}} - \dfrac{1}{3\sqrt[6]{x^7}}$ $(x > 0)$, (b) **(HA)** $\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^n$ $(n \in \mathbb{Z},\, x \neq a)$, (c) $x^{1/x}$ $(x > 0)$,

   (d) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ $(x > 0)$, (e) **(HA)** $\arctan \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ $(-1 < x < 1)$,

   (f) **(HA)** a^{a^x} $(a > 0)$, (g) $x^{\sin x}$ $(x > 0)$, (h) **(HA)** $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ $(x > 0)$,

   (i) a^{x^a} $(a, x > 0)$.

6. Bestimmen Sie die n-te Ableitung folgender Funktionen $f(x)$ in ihrem natürlichen Definitionsgebiet:

   (a) $f(x) = \sin x$, (b) $f(x) = \ln x$, (c) $f(x) = \sqrt{1+x}$, (d) **(HA)** $f(x) = x^n$.

7. Beweisen mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (Satz 0.20)

   (a) $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$, (b) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, $x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$.

8. Berechnen Sie folgende Grenzwerte (ggf. unter Verwendung der l'Hospitalschen Regel):

   (a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}$, (b) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$, (c) **(HA)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$,

   (d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(mx)}{\sin(nx)}$, $m, n \neq 0$, (e) **(HA)** $\lim\limits_{x \to 0} x \cot x$, (f) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin(3x)}{\tan(5x)}$,

   (g) **(HA)** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right)$, (h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin x^{-1}}{\sin x}$, (i) **(HA)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + \sin x}{3x + \sin x}$,

   (j) $\lim\limits_{x \to +0} x^x$, (k) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$, (l) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x^s}$, $s > 0$,

   (m) **(HA)** $\lim\limits_{x \to 0} x^s \ln x$, $s > 0$, (n) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x}$.

9. Entwickeln Sie folgende Funktionen $f : A \longrightarrow B$ im Punkt x_0 nach der Taylorschen Formel bis $n = 3$, und geben Sie das Lagrangesche Restglied an:

   (a) **(HA)** $A = [-1, \infty)$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x_0 = 0$,

(b) $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$,

(c) $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^{-x}$, $x_0 = 0$.

10. Die Unkosten u eines Schiffes berechnen sich nach der Formel $u = a + b\,v^3$ ($a > 0$, $b > 0$ - Konstanten). Bei welcher Geschindigkeit v ist die Rentabilität $\frac{v}{u}$ maximal?

11. **(HA)** Gilt für $|x| < 2$ die Ungleichung $|3x - x^3| \le 2$?

12. Welches Rechteck, das der Ellipse $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ einbeschrieben ist, hat den größten Flächeninhalt ($a > 0$, $b > 0$ - Konstanten).

13. Führen Sie zu folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion durch (Definitions- und Wertebereich, Nullstellen, Extremstellen und -werte, Wendepunkte, Konvexität bzw. Konkavität, Monotonie, evtl. Polstellen und das Verhalten an diesen, Asymptoten, Symmetrie):

(a) **(HA)** $f(x) = 3x - x^3$, (b) $f(x) = \dfrac{(x-2)(x-3)}{x^2 - 6x + 8}$, (c) $f(x) = x^2 e^{-x}$,

(d) **(HA)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{a - x}}$ ($a > 0$ - Konstante).

0.9 Verallgemeinerungen des Ableitungsbegriffes

Im weiteren bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^k$ die Menge aller k-Tupel reeller Zahlen $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$, die wir auch mit dem Vektor

$$x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_k \end{bmatrix}^T$$

identifizieren, der vom Koordinatenursprung $(0, \ldots, 0)$ auf den Punkt mit den Koordinaten $\xi_1, \ldots, \xi_k$ im Raum $\mathbb{R}^k$ zeigt. Man definiert für $x = \begin{bmatrix} \xi_i \end{bmatrix}_{i=1}^k$, $y = \begin{bmatrix} \eta_i \end{bmatrix}_{i=1}^k$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ die Summe $x + y$ zweier Vektoren und das Produkt $\alpha\, x$ eines Skalars mit einem Vektor durch

$$x + y := \begin{bmatrix} \xi_i + \eta_i \end{bmatrix}_{i=1}^k \quad \text{und} \quad \alpha\, x := \begin{bmatrix} \alpha\, \xi_i \end{bmatrix}_{i=1}^k .$$

Die Länge dieses Vektors berechnen wir mittels

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_k^2}.$$

Dabei ist mit $\langle x, y \rangle$ das Skalarprodukt zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^k$ bezeichnet:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^k \xi_i \eta_i .$$

Skalarprodukt und Norm besitzen folgende Eigenschaften:

(S1) $\langle x,x\rangle \ge 0$ und $\langle x,x\rangle = 0 \iff x = \Theta := \left[\ 0\ \right]_{i=1}^{k}$,

(S2) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$,

(S3) $\langle \alpha\, x + \beta\, y, z\rangle = \alpha\, \langle x,z\rangle + \beta\, \langle y,z\rangle$,

(N1) $\|x\| \ge 0$ und $\|x\| = 0 \iff x = \Theta$,

(N2) $\|\alpha\, x\| = |\alpha|\, \|x\|$,

(SN) $\langle x,y\rangle \le \|x\|\, \|y\|$, (Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung)

(N3) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$. (Dreiecksungleichung)

Mit Hilfe der Norm kann man den Abstand zweier Punkte $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^k$ und $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^k$ über

$$\|x-y\| = \sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2 + \cdots + (\xi_k-\eta_k)^2}$$

berechnen. Damit sind wir auch in der Lage, die Konvergenz einer Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ von Punkten $x_n = \left[\ \xi_i^{(n)}\ \right]_{i=1}^{k} \in \mathbb{R}^k$ gegen einen Punkt $x^* = \left[\ \xi_i^*\ \right]_{i=1}^{k} \in \mathbb{R}^k$ zu beschreiben:

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \iff \lim_{n\to\infty} \|x_n - x^*\| = 0\,.$$

Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^* \iff \lim_{n\to\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i^*\,,\ i = 1, \ldots, k\,.$$

Mit $U_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R}^k$ bezeichnen wir die (offene) **Kugel** mit dem Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^k$ und dem Radius $\varepsilon > 0$:

$$U_\varepsilon(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^k : \|y-x\| < \varepsilon \right\}\,.$$

Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ nennt man **offen**, wenn für jedes $x \in \Omega$ eine Zahl $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ existiert, so dass $U_\varepsilon(x) \subset \Omega$ gilt.

Unter einer Matrix $A = \left[\ \alpha_{ji}\ \right]_{j=1,i=1}^{m\quad k} \in \mathbb{R}^{m\times k}$ verstehen wir das rechteckige Schema

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mk} \end{bmatrix},$$

welches wir auch als Abbildung $A : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto A\,x$ über folgende Vorschrift interpretieren können:

$$A\,x = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_k \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix}, \quad \eta_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ji}\xi_i\,.$$

Es gilt

$$A(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha\, A\, x + \beta\, A\, y\,, \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^k\,,\ \forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}\,.$$

Man nennt deshalb $A : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m$ auch eine **lineare Abbildung**.

0.9.1 Vektorwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen

Für eine Abbildung $x : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $t \mapsto \left[\ \xi_i(t)\ \right]_{i=1}^k$ mit $\xi_i : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert man die Ableitung $x'(t)$ als

$$x'(t) = \begin{bmatrix} \xi_1'(t) \\ \vdots \\ \xi_k'(t) \end{bmatrix} .$$

Wird dabei $t \in (a,b)$ als Zeit interpretiert, so schreibt man auch $\dot{x}(t)$ anstelle von $x'(t)$. Dabei kann man $x : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ als Bewegung eines Punktes $x = x(t)$ im Raum $\mathbb{R}^k$ entlang der Kurve $\Gamma = \{x(t) : t \in (a,b)\} \subset \mathbb{R}^k$ interpretieren, so dass der Vektor $\dot{x}(t)$ die Geschwindigkeit des Punktes zum Zeitpunkt t angibt und in Richtung der Tangente an die Kurve Γ im Punkt $x(t)$ zeigt.

0.9.2 Reellwertige Funktionen zweier reeller Veränderlicher

Auf einer Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ betrachten wir eine Funktion

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x = (\xi_1, \xi_2) \mapsto f(x) = f(\xi_1, \xi_2) .$$

Definition 0.42 *Man sagt, dass die Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $x^* \in \mathbb{R}^2$ den Grenzwert $a^* \in \mathbb{R}$ besitzt, wenn für jede Punktfolge $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \Omega \setminus \{x^*\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ die Beziehung*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a^*$$

erfüllt ist (vgl. Definition 0.5). Die Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x^* \in \Omega$, wenn

$$\lim_{x\to x^*} f(x) = f(x^*)$$

gilt (vgl. Definition 0.7).

Beispiel 0.43 *Wir definieren*

$$f(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} \dfrac{2\xi_1\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} & , \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} , \\ 0 & , \quad x = (0,0) . \end{cases}$$

Diese Funktion ist im Punkt $(0,0)$, ebenso wie in allen anderen Punkten $x^* \in \mathbb{R}^2$ stetig.

Beispiel 0.44 *Die Funktion*

$$f(\xi_1, \xi_2) = \frac{2\xi_1\xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} , \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) ,$$

besitzt im Punkt $(0,0)$ keinen Grenzwert.

Unter Verwendung des Grenzwertbegriffes für reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen definieren wir die Begriffe **partielle Ableitung** und **Richtungsableitung**.

Definition 0.45 *Es seien* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *eine offene Menge und* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine gegebene Funktion sowie* $x^* = (\xi_1^*, \xi_2^*) \in \Omega$ *ein fest gewählter Punkt. Existiert der endliche Grenzwert*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\xi_1^* + h, \xi_2^*) - f(\xi_1^*, \xi_2^*)}{h},$$

so heißt dieser **partielle Ableitung von** f **nach** ξ_1 **im Punkt** ξ^* *und wird mit*

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial \xi_1}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial \xi_1}\right|_{x=x^*} \quad \text{oder} \quad f_{\xi_1}(x^*)$$

bezeichnet. Analog definiert man $\dfrac{\partial f(x^*)}{\partial \xi_2}$. *Es sei* $\overrightarrow{n}$ *eine Richtung* $\overrightarrow{n} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}^T$. *Existiert der endliche Grenzwert*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\xi_1^* + h\cos\alpha, \xi_2^* + h\sin\alpha) - f(\xi_1^*, \xi_2^*)}{h},$$

so nennt man diesen **Richtungsableitung von** f **im Punkt** x^* **in Richtung** $\overrightarrow{n}$ *und bezeichnet ihn mit*

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial \overrightarrow{n}}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{n}}\right|_{x=x^*} \quad \text{oder} \quad f_{\overrightarrow{n}}(x^*)\,.$$

(Offenbar sind die partiellen Ableitungen spezielle Richtungsableitungen.)

Beispiel 0.46 *Wir betrachten die Funktion aus Beispiel 0.43. Für* $(\xi_1, \xi_2) \neq (0,0)$ *gilt*

$$\frac{\partial f(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_k} = \frac{2\xi_{3-k}\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} - \dfrac{2\xi_1\xi_2\xi_k}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}}{\xi_1^2 + \xi_2^2} = \frac{2\xi_{3-k}^3}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{3/2}}, \quad k = 1, 2.$$

Offenbar gilt

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \xi_k} = 0, \quad k = 1, 2\,.$$

Es seien nun $0 < |\alpha| < \dfrac{\pi}{2}$ *und* $\overrightarrow{n} = [\cos\alpha, \sin\alpha]^T$. *Aus*

$$\frac{f(h\cos\alpha, h\sin\alpha) - f(0,0)}{h} = \sin(2\alpha)\operatorname{sgn} h$$

folgt, dass die Richtungsableitung $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial \overrightarrow{n}}$ **nicht** *existiert.*

Definition 0.47 *Es seien* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *eine offene Menge und* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine gegebene Funktion sowie* $x^* = (\xi_1^*, \xi_2^*) \in \Omega$ *ein fest gewählter Punkt. Die Funktion* f *heißt im Punkt* x^* **differenzierbar**, *wenn zwei reelle Zahlen* A_1 *und* A_2 *existieren, so dass*

$$f(x) = f(x^*) + A_1(\xi_1 - \xi_1^*) + A_2(\xi_2 - \xi_2^*) + \rho(x)\,\|x - x^*\|$$

mit

$$\lim_{x \to x^*} \rho(x) = 0$$

gilt.

Bemerkung 0.48 *Ist f im Punkt x^* differenzierbar, so beschreibt die Gleichung*

$$\xi_3 = f(\xi_1^*, \xi_2^*) + A_1(\xi_1 - \xi_1^*) + A_2(\xi_2 - \xi_2^*)$$

die **Tangentialebene** *an den Graphen der Funktion f im Punkt $(\xi_1^*, \xi_2^*, f(\xi_1^*, \xi_2^*))$. Ferner gilt*

$$A_k = \frac{\partial f(x^*)}{\partial \xi_k}, \quad k = 1, 2,$$

und für jede Richtung $\overrightarrow{n} = [\cos\alpha, \cos\beta]^T$ existiert die Richtungsableitung im Punkt x^* , wobei

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial \overrightarrow{n}} = \frac{\partial f(x^*)}{\partial \xi_1} \cos\alpha + \frac{\partial f(x^*)}{\partial \xi_2} \sin\alpha \,. \tag{0.27}$$

Den Zeilenvektor $f'(x^*) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f(x^*)}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}$ nennt man **Ableitung** *der Funktion f im Punkt x^* , den Spaltenvektor $\nabla f(x^*) := \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f(x^*)}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}^T = [f'(x^*)]^T$* **Gradient** *der Funktion f im Punkt x^* . Man kann also die Gleichung (0.27) auch in der Form*

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial \overrightarrow{n}} = \langle \nabla f(x^*), \overrightarrow{n} \rangle$$

schreiben.

Folgerung 0.49 *Der Gradient $\nabla f(x^*)$ einer im Punkt x^* differenzierbaren Funktion f zeigt in die Richtung, in der sich die Funktionswerte $f(x)$ am schnellsten ändern, denn es gilt*

$$\left| \frac{\partial f(x^*)}{\partial \overrightarrow{n}} \right| = |\langle \nabla f(x^*), \overrightarrow{n} \rangle| \le \|\nabla f(x^*)\| \,,$$

wobei Gleichheit für $\overrightarrow{n} = \dfrac{\nabla f(x^*)}{\|\nabla f(x^*)\|}$ gilt. Einen Punkt x^* mit $\nabla f(x^*) = \Theta$ nennt man einen **stationären Punkt** *der Funktion f .*

Das folgende Beispiel zeigt, dass aus der Existenz der partiellen Ableitungen i.a. **nicht** die Differenzierbarkeit der Funktion folgt. Es zeigt sogar, dass die Existenz aller Richtungsableitungen **nicht** die Differenzierbarkeit garantiert.

Beispiel 0.50 *Wir betrachten die Funktion*

$$f(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} \dfrac{\xi_1^2 \xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} &, \quad (\xi_1, \xi_2) \neq (0, 0) \,, \\ 0 &, \quad (\xi_1, \xi_2) = (0, 0) \,. \end{cases}$$

Es gilt

$$\frac{f(h\cos\alpha, h\sin\alpha) - f(0,0)}{h} = \cos^2\alpha\sin\alpha\,,$$

also für $\overrightarrow{n} = [\cos\alpha, \sin\alpha]^T$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \overrightarrow{n}} = \cos^2\alpha\sin\alpha\,.$$

Insbesondere erhalten wir

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \xi_k} = 0\,, \quad k = 1,2\,.$$

Andererseits ist aber für $(\xi_1, \xi_2) \neq (0,0)$

$$f(\xi_1,\xi_2) - f(0,0) = \frac{\partial f(0,0)}{\partial \xi_1}\xi_1 + \frac{\partial f(0,0)}{\partial \xi_2}\xi_2 + \frac{\xi_1^2\xi_2}{\xi_1^2+\xi_2^2} = \rho(x)\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$$

mit

$$\rho(x) = \frac{\xi_1^2\xi_2}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^{3/2}} \not\longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad x \longrightarrow \Theta\,,$$

so dass f *im Punkt* $\Theta = (0,0)$ **nicht** *differenzierbar ist.*

Folgerung 0.51 (Verallgemeinerte Kettenregel) *Die Funktionen* $\varphi_j : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = 1,2$, *seien im Punkt* $t^* \in (a,b)$ *und die Funktion* $f(\xi_1,\xi_2)$ *im Punkt* $x^* = (\varphi_1(t^*), \varphi_2(t^*))$ *differenzierbar. Dann ist die verkettete Funktion* $F(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ *im Punkt* t^* *differenzierbar, und es gilt*

$$F'(t^*) = \frac{\partial f(x^*)}{\partial \xi_1}\,\varphi_1'(t^*) + \frac{\partial f(x^*)}{\partial \xi_2}\,\varphi_2'(t^*)\,.$$

Beispiel 0.52 *Es seien* $f(\xi_1,\xi_2) = \xi_1\sin(\xi_1\xi_2)$ *und* $\varphi_1(t) = t^2$, $\varphi_2(t) = \ln(t^2+1)$. *Dann ist*

$$F(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = t^2\sin\left(t^2\ln(t^2+1)\right).$$

Unter Verwendung der verallgemeinerten Kettenregel erhalten wir schrittweise

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_1} &= \sin(\xi_1\xi_2) + \xi_1\xi_2\cos(\xi_1\xi_2)\,,\\
\frac{\partial f(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_2} &= \xi_1^2\cos(\xi_1\xi_2)\,,\\
\varphi_1'(t) &= 2\,t\,,\\
\varphi_2'(t) &= \frac{2\,t}{t^2+1}\,,\\
F'(t) &= \left[\sin\left(t^2\ln(t^2+1)\right) + t^2\ln(t^2+1)\cos\left(t^2\ln(t^2+1)\right)\right]\,2\,t\\
&\qquad +t^4\cos\left(t^2\ln(t^2+1)\right)\frac{2\,t}{t^2+1}\,.
\end{aligned}$$

Dass die in der Folgerung 0.51 gemachte Voraussetzung der Differenzierbarkeit von f wesentlich ist, sieht man an folgendem Beispiel.

Beispiel 0.53 *Es seien f die Funktion aus Beispiel 0.50 und $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = t$. Dann ist $F(t) = f(t,t) = \frac{t}{2}$, also $F'(0) = \frac{1}{2}$. Die verallgemeinerte Kettenregel liefert aber $F'(0) = 0$.*

Existiert für $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ in jedem Punkt $x \in \Omega$ die partielle Ableitung $\frac{\partial f(x)}{\partial \xi_j} =: g(x)$, so kann man die Frage nach der Existenz der partiellen Ableitungen von $g(x)$ stellen. Auf diese Weise erhält man **partielle Ableitungen höherer Ordnung**. Dabei verwendet man folgende Bezeichungen:

$$\frac{\partial g}{\partial \xi_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_j \partial \xi_k} = f_{\xi_k \xi_j}\,.$$

Im Fall $j = k$ schreibt man auch $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_k^2}$. Es ist nun klar, wie partielle Ableitungen dritter, vierter, usw. Ordnung gebildet werden. Oft ist dabei die Reihenfolge des Bildens der einzelnen partiellen Ableitungen unwesentlich. Es gilt z.B. folgender Satz.

Satz 0.54 *Ist die Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ gemeinsam mit ihren partiellen Ableitungen f_{ξ_1}, f_{ξ_2}, $f_{\xi_1\xi_2}$ stetig, so existiert in Ω auch die partielle Ableitung $f_{\xi_2\xi_1}$ und es gilt $f_{\xi_2\xi_1}(x) = f_{\xi_1\xi_2}(x)$ für alle $x \in \Omega$.*

Es sei nun $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine auf ganz Ω gemeinsam mit ihren ersten partiellen Ableitungen stetig differenzierbare Funktion. Für einen fest gewählten Punkt $x^0 \in \Omega$ und einen beliebigen Punkt $x = (\xi_1, \xi_2) = (\xi_1^0 + h_1, \xi_2^0 + h_2)$ mit $[\xi_1^0, \xi_1^0 + h_1] \times [\xi_2^0, \xi_2^0 + h_2] \subset \Omega$ betrachten wir die Funktion

$$F(t) = f(\xi_1^0 + th_1, \xi_2^0 + th_2)\,, \quad t \in [0,1]\,.$$

Nach der uns bekannten Taylorentwicklung (siehe (4.5) und (4.6)) existiert ein $\theta \in (0,1)$, so dass

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!}F''(\theta)\,,$$

wobei nach der verallgemeinerten Kettenregel (Folg. 0.51)

$$F'(t) = \sum_{j=1}^{2} h_j \frac{\partial f(\xi_1^0 + th_1, \xi_2^0 + th_2)}{\partial \xi_j}$$

und

$$F''(t) = \sum_{j=1}^{2} h_j \sum_{k=1}^{2} h_k \frac{\partial^2 f(\xi_1^0 + th_1, \xi_2^0 + th_2)}{\partial \xi_j \partial \xi_k}$$

ist. Es gilt also

$$f(x) = f(x^0) + h_1 \frac{\partial f(x^0)}{\partial \xi_1} + h_2 \frac{\partial f(x^0)}{\partial \xi_2} + \frac{1}{2!}\left[h_1^2 \frac{\partial^2 f(x^\theta)}{\partial \xi_1^2} + 2h_1h_2 \frac{\partial^2 f(x^\theta)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + h_2^2 \frac{\partial^2 f(x^\theta)}{\partial \xi_2^2}\right] \tag{0.28}$$

mit $x^\theta = (\xi_1^0 + \theta h_1, \xi_2^0 + \theta h_2)$.

Wir fassen nun ξ_1 und ξ_2 als Messgrössen mit den (absoluten) Fehlern $\Delta\xi_1$ und $\Delta\xi_2$ auf und fragen nach dem daraus resultierenden Fehler $\Delta f(\xi_1, \xi_2)$. Nach Formel (0.28) gilt

$$\Delta f(\xi_1, \xi_2) = f(\xi_1 + \Delta\xi_1, \xi_2 + \Delta\xi_2) - f(\xi_1, \xi_2) \approx \Delta\xi_1 \frac{\partial f(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1} + \Delta\xi_2 \frac{\partial f(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} .$$

Wir interessieren uns für die **relativen Fehler**

$$\frac{\Delta\xi_1}{\xi_1}, \quad \frac{\Delta\xi_2}{\xi_2}, \quad \frac{\Delta f(\xi_1, \xi_2)}{f(\xi_1, \xi_2)}$$

und bezeichnen deren Absolutbeträge mit

$$\delta\xi_1 = \left|\frac{\Delta\xi_1}{\xi_1}\right|, \quad \delta\xi_2 = \left|\frac{\Delta\xi_2}{\xi_2}\right|, \quad \delta f(\xi_1, \xi_2) = \left|\frac{\Delta f(\xi_1, \xi_2)}{f(\xi_1, \xi_2)}\right| .$$

Beispiel 0.55 *Als Beispiel betrachten wir die Fortpflanzung der relativen Fehler bei der Multiplikation und der Division zweier reeller Zahlen:*

- **Multiplikation***:* $f(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \xi_2$

  Wir haben $f_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2) = \xi_2$ *und* $f_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2) = \xi_1$. *Es folgt*

  $$\frac{\Delta f(\xi_1, \xi_2)}{f(\xi_1, \xi_2)} \approx \frac{(\Delta\xi_1)\xi_2 + (\Delta\xi_2)\xi_1}{\xi_1 \xi_2} = \frac{\Delta\xi_1}{\xi_1} + \frac{\Delta\xi_2}{\xi_2} ,$$

  also

  $$\delta f \lesssim \delta\xi_1 + \delta\xi_2 .$$

- **Division***:* $f(\xi_1, \xi_2) = \dfrac{\xi_1}{\xi_2}$

  In diesem Fall haben wir $f_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2) = \dfrac{1}{\xi_2}$ *und* $f_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2) = -\dfrac{\xi_1}{\xi_2^2}$ *und somit*

  $$\frac{\Delta f(\xi_1, \xi_2)}{f(\xi_1, \xi_2)} \approx \frac{\dfrac{\Delta\xi_1}{\xi_2} - \dfrac{(\Delta\xi_2)\xi_1}{\xi_2^2}}{\dfrac{\xi_1}{\xi_2}} = \frac{\Delta\xi_1}{\xi_1} - \frac{\Delta\xi_2}{\xi_2} ,$$

  also wiederum

  $$\delta f \lesssim \delta\xi_1 + \delta\xi_2 .$$

Wir betrachten nun eine gemeinsam mit ihren ersten partiellen Ableitungen stetig differenzierbare Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ und suchen **lokale Extrempunkte** dieser Funktion, d.h. solche Punkte $x^0 \in \Omega$, für die ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$f(x) \geq f(x^0) \quad \forall\, x \in U_\varepsilon(x^0) \subset \Omega$$

oder
$$f(x) \le f(x^0) \quad \forall\, x \in U_\varepsilon(x^0) \subset \Omega$$
gilt. Es ist leicht einzusehen, dass ein solcher Punkt notwendigerweise ein stationärer Punkt der Funktion f sein muss. Wir fragen nach einer Bedingung, die garantiert, dass ein stationärer Punkt tatsächlich lokaler Extremalpunkt ist. Aus Formel (0.28) folgt mit $x = (\xi_1^0 + h_1, \xi_2^0 + h_2)$
$$f(x) - f(x^0) = \frac{1}{2!}\left[h_1^2 A_\theta + 2h_1h_2B_\theta + h_2^2 C_\theta\right],$$
wobei
$$A_\theta = \frac{\partial^2 f(x^\theta)}{\partial \xi_1^2}, \quad B_\theta = \frac{\partial^2 f(x^\theta)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}, \quad C_\theta = \frac{\partial^2 f(x^\theta)}{\partial \xi_2^2}.$$
Wir nehmen an, dass $A_\theta \neq 0$ erfüllt ist. Dann folgt aus der letzten Beziehung
$$\begin{aligned} f(x) - f(x^0) &= \frac{1}{2A_\theta}\left[h_1^2 A_\theta^2 + 2h_1h_2A_\theta B_\theta + h_2^2 A_\theta C_\theta\right] \\ &= \frac{1}{2A_\theta}\left[(h_1A_\theta + h_2B_\theta)^2 + (A_\theta C_\theta - B_\theta^2)h_2^2\right]. \end{aligned}$$
Gilt also in einer Umgebung des Punktes x^0 die Ungleichung $A_\theta C_\theta - B_\theta^2 > 0$, so liegt ein Extremum vor. Aus Stetigkeitsgründen ergibt sich somit der folgende Satz.

Satz 0.56 *Es seien $x^0 \in \Omega$ ein stationärer Punkt der gemeinsam mit ihren ersten partiellen Ableitungen stetig differenzierbaren Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ und*
$$A = \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial \xi_1^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial \xi_2^2}.$$
Gilt $AC - B^2 > 0$, so liegt im Punkt x^0 ein Extremum von f vor, und zwar ein lokales Minimum, falls $A > 0$, bzw. ein lokales Maximum, falls $A < 0$. Ist $AC - B^2 < 0$, so liegt in x^0 kein Extremum vor.

Beispiel 0.57 $f(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 4\xi_2^2 + 2\xi_1 - 10\xi_2 + 5$

Im Punkt $x^0 = (-3, 2)$ liegt ein lokales Minimum vor.

Beispiel 0.58 $f(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^4 + \xi_2^2$, $g(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^3 + \xi_2^2$

$(0,0)$ ist stationärer Punkt für beide Funktionen. Für f liegt in $(0,0)$ ein (globales) Minimum vor, für g dagegen kein Extremum. Der Satz 0.56 liefert hier keine Aussage, da in beiden Fällen $AC - B^2 = 0$ gilt.

Wir betrachten nun das Problem der Bestimmung des größten und kleinsten Wertes einer Funktion. Dazu sei die Funktion $f(\xi_1, \xi_2)$ auf der (offenen) Menge Ω einschließlich ihres Randes $\partial\Omega$ (Bez.: $\Omega \cup \partial\Omega =: \overline{\Omega}$) definiert und stetig. Setzen wir noch die Existenz der ersten partiellen Ableitungen von f in Ω voraus, so kommen als **extremwertverdächtige Punkte** die stationären Punkte von f in Ω und die Randpunkte von Ω in Frage.

Beispiel 0.59 *Man bestimme den größten Wert der Funktion*

$$f(\xi_1, \xi_2) = \sin \xi_1 + \sin \xi_2 - \sin(\xi_1 + \xi_2)$$

auf der Menge $\overline{\Omega} = \left\{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 \geq 0\,,\ \xi_2 \geq 0\,,\ \xi_1 + \xi_2 \leq 2\pi\right\}$.

Lösung: *In* $\Omega = \left\{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 > 0\,,\ \xi_2 > 0\,,\ \xi_1 + \xi_2 < 2\pi\right\}$ *ist* $(\xi_1^0, \xi_2^0) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ *der einzige stationäre Punkt von* f , *wobei*

$$f(\xi_1^0, \xi_2^0) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

gilt. Wir untersuchen noch die Funktionswerte auf dem Rand von Ω :

- $\xi_1 = 0 : f(0, \xi_2) = 0$
- $\xi_2 = 0 : f(\xi_1, 0) = 0$
- $\xi_1 + \xi_2 = 2\pi : f(\xi_1, \xi_2) = \sin \xi_1 + \sin(2\pi - \xi_1) = 0$

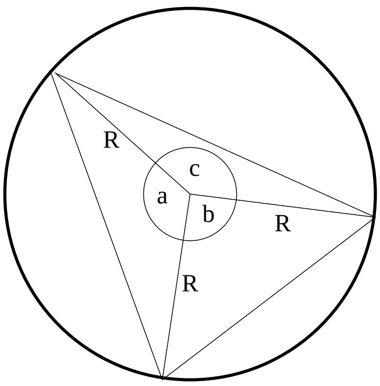
Also ist $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ *der größte Wert der Funktion* f *auf* $\overline{\Omega}$.

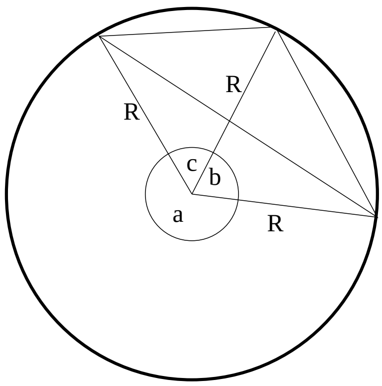
Wenden wir im vorhergehenden Beispiel auf den Punkt (ξ_1^0, ξ_2^0) den Satz 0.56 an, so erhalten wir $A < 0$ und $AC - B^2 > 0$. Könnte man daraus bereits schlussfolgern, dass in diesem Punkt der größte Funktionswert angenommen wird? Das folgende Beispiel zeigt, dass man diese Frage mit **nein** beantworten muss. (Im Gegensatz zum Fall reellwertiger Funktionen, die nur von einer reellen Veränderlichen abhängen!)

Beispiel 0.60 $\overline{\Omega} = [-5, 5] \times [-1, 1]$, $f(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^3 - 4\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 - \xi_2^2$

Der Punkt $(0, 0)$ *ist einziger stationärer Punkt in* $\Omega = (-5, 5) \times (-1, 1)$, *und dort gilt* $A < 0$ *sowie* $AC - B^2 > 0$, *wobei* $f(0, 0) = 0$ *ist. Wir haben aber z.B.* $f(5, 0) = 25 > f(0, 0)$.

Beispiel 0.61 *Unter allen Dreiecken, die einem Kreis mit dem Radius* $R > 0$ *einbeschrieben sind, bestimme man das Dreieck mit dem größten Flächeninhalt.*





Lösung: *Wir verwenden die Formel für den Flächeninhalt F eines Dreiecks, die besagt, dass F gleich dem halben Produkt aus den Längen zweier Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels ist. Es folgt*

$$F = \frac{1}{2}R^2(\sin a + \sin b + \sin c) = \frac{1}{2}R^2\left[\sin a + \sin b - \sin(a+b)\right] ,$$

$a > 0$, $b > 0$, $a+b < 2\pi$. *Aus Beispiel 0.59 folgt, dass F für $a = b = \frac{2\pi}{3}$ $\left(\Rightarrow c = \frac{2\pi}{3}\right)$ maximal wird.*

0.9.3 Reellwertige Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher

Die Grenzwert- und Stetigkeitsdefinition 0.42 lassen sich direkt auch auf Funktionen $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ übertragen. Für weitere Verallgemeinerungen bezeichnen wir mit $e^j \in \mathbb{R}^k$ den j-ten Einheitsvektor $e^j = \left[\ \delta_{j,k}\ \right]_{j=1}^{k}$.

1. **Partielle Ableitung** $\dfrac{\partial f}{\partial \xi_j}$:

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial \xi_j} := \lim_{h\to 0} \frac{f(x^* + h\,e^j) - f(x^*)}{h}$$

2. **Richtungsableitung** $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{n}}$:

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial \overrightarrow{n}} := \lim_{h\to 0} \frac{f(x^* + h\overrightarrow{n}) - f(x^*)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi_1^* + h\chi_1, \ldots, \xi_k^* + h\chi_k) - f(\xi_1^*, \ldots, \xi_k^*)}{h} ,$$

$$\overrightarrow{n} = [\chi_1, \ldots, \chi_k]^T \in \mathbb{R}^m , \quad \|\overrightarrow{n}\| = 1$$

3. **Differenzierbarkeit** im Punkt $x^* \in \Omega$:

$$f(x) = f(x^*) + A_1(\xi_1 - \xi_1^*) + \cdots + A_k(\xi_k - \xi_k^*) + \rho(x)\,\|x - x^*\| ,$$

$$\lim_{x\to x^*} \rho(x) = 0$$

Es folgt

$$A_i = \frac{\partial f(x^*)}{\partial \xi_i} , \quad i = 1, \ldots, k .$$

Den Zeilenvektor $f'(x^*) := \left[\ \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial \xi_1} \ \cdots \ \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial \xi_k}\ \right]$ nennt man **Ableitung** der Funktion f im Punkt x^* , den Spaltenvektor $\nabla f(x^*) := \left[\ \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial \xi_1} \ \cdots \ \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial \xi_k}\ \right]^T = [f'(x^*)]^T$ **Gradient** der Funktion f im Punkt x^* . Es gilt

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial \overrightarrow{n}} = \langle \nabla f(x^*), \overrightarrow{n} \rangle .$$

4. **Verallgemeinerte Kettenregel**:

$$F(t) = f(\varphi(t)) = f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_k(t)), \quad \varphi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_k(t) \end{bmatrix},$$

$$F'(t^*) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f(\varphi(t^*))}{\partial \xi_j} \varphi_j'(t^*) = \left\langle \nabla f(\varphi(t^*)), \varphi'(t^*) \right\rangle$$

5. **Mittelwertsatz**:

$$h = (h_1, \ldots, h_k) \in \mathbb{R}^k,$$

$$f(x^0 + h) - f(x^0) = \sum_{j=1}^{k} h_j \frac{\partial f(x^\theta)}{\partial \xi_j}, \quad \theta \in (0,1),$$

$$x^\theta = x^0 + \theta\, h = (\xi_1^0 + \theta\, h_1, \ldots, \xi_k^0 + \theta\, h_k)$$

6. **Taylorentwicklung**:

$$h = (h_1, \ldots, h_k) \in \mathbb{R}^k,$$

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + \sum_{j=1}^{k} h_j \frac{\partial f(x^0)}{\partial \xi_j} + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} h_j h_i \frac{\partial^2 f(x^\theta)}{\partial \xi_j \partial \xi_i}, \quad \theta \in (0,1),$$

$$x^\theta = x^0 + \theta\, h = (\xi_1^0 + \theta\, h_1, \ldots, \xi_k^0 + \theta\, h_k)$$

7. **Lokale Extrema**:

   (a) Notwendige Bedingung: $\nabla f(x^0) = \Theta$ (stationärer Punkt).

   (b) Hinreichende Bedingung: $\nabla f(x^0) = \Theta$ und

$$\langle A\, h, h \rangle = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} \alpha_{jk} h_j h_i \begin{cases} > 0 & , \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^m \setminus \{\Theta\} \quad \text{lokales Minimum}, \\ < 0 & , \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^m \setminus \{\Theta\} \quad \text{lokales Maximum}, \end{cases}$$

   wobei

$$A = \left[\ \alpha_{ji}\ \right]_{j=1,i=1}^{k\ \ k} = \left[\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial \xi_j \partial \xi_i} \right]_{j=1,i=1}^{k\ \ k}. \quad \text{(Hesse – Matrix)}$$

   Die Matrix A nennt man in diesem Fall auch **positiv** bzw. **negativ definit**.

Beispiel 0.62 *Es sei*

$$D = \left\{ x = \left[\ \xi_j\ \right]_{j=1}^{k} \in \mathbb{R}^k : \xi_j > 0\,,\ j = 1, \ldots, k\,,\ \xi_1 + \cdots + \xi_k = k\, a \right\},$$

wobei $a > 0$ eine fest vorgegebene Zahl ist. Wir suchen von der Funktion

$$g : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_k$$

den größten Funktionswert.
Lösung: *D ist keine offene Menge! Die Problemstellung ist aber äquivalent zu folgender: Gesucht ist der größte Funktionswert der Funktion*

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad (\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}) \mapsto \xi_1 \cdots \xi_{k-1}(k\,a - \xi_1 - \cdots - \xi_{k-1})\,,$$

wobei

$$\Omega = \left\{(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1} : \xi_j > 0\,,\ j = 1, \ldots, k-1\,,\ \xi_1 + \cdots + \xi_{k-1} < k\,a\right\}\,.$$

Nun ist

$$\frac{\partial f(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1})}{\partial \xi_j} = (k\,a - \xi_1 - \cdots - \xi_{k-1} - \xi_j)\left(\prod_{i=1, i\neq j}^{k-1} \xi_i\right)\,,$$

so dass $x^0 = \left[\ \xi_i^0\ \right]_{i=1}^{k-1}$ *mit* $\xi_1^0 = \cdots = \xi_{k-1}^0 = a$ *einziger stationärer Punkt in* Ω *ist. Auf dem Rand von* Ω *sind die Funktionswerte von* f *gleich Null. Also gilt*

$$f(a, \ldots, a) = g(a, \ldots, a, a) = a^k \geq \xi_1 \ldots \xi_k \quad \forall\, x \in D\,,$$

d.h.

$$\xi_1 \cdots \xi_k \leq \left(\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_k}{k}\right)^k \quad \textit{oder} \quad \sqrt[k]{\xi_1 \cdots \xi_k} \leq \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_k}{k}\,.$$

Das geometrische Mittel positiver Zahlen übersteigt also nie ihr arithmetisches Mittel.

0.9.4 Vektorwertige Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher

Wir betrachten eine Abbildung $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^k$. Ausführlich geschrieben bedeutet $y = f(x)$ mit $x = \left[\ \xi_i\ \right]_{i=1}^{k}$ und $y = \left[\ \eta_j\ \right]_{j=1}^{m}$

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= f_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)\,, \\
\eta_2 &= f_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)\,, \\
&\vdots \\
\eta_m &= f_m(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)\,,
\end{aligned}$$

wobei die Funktionen $f_j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ j = 1, \ldots, m\,,$ reellwertige Funktionen von k reellen Veränderlichen sind.

Differenzierbarkeit in einem Punkt $x^* \in \Omega$:

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + \rho(x)\,\|x - x^*\|$$

mit

$$\lim_{x \to x^*} \|\rho(x)\| = 0\,.$$

Dabei ist

$$f'(x^*) = \left[\ \frac{\partial f_j(x^*)}{\partial \xi_i}\ \right]_{j=1, i=1}^{m\quad k}\,.$$

Beispiel 0.63 *Wir berechnen die Ableitungen verschiedener Funktionen:*

1. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2\,,\ x \mapsto \begin{bmatrix} \xi_1 \sin(\xi_2\xi_3) \\ \xi_1^2 - \xi_2^2 + \cos\xi_3 \end{bmatrix}$,

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \sin(\xi_2\xi_3) & \xi_1\xi_3\cos(\xi_2\xi_3) & \xi_1\xi_2\cos(\xi_2\xi_3) \\ 2\,\xi_1 & -2\,\xi_2 & -\sin\xi_3 \end{bmatrix}.$$

2. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \xi_1^2 + \sin(\xi_1\xi_2)\,,$

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 2\,\xi_1 + \xi_2\cos(\xi_1\xi_2) & \xi_1\cos(\xi_1\xi_2) \end{bmatrix}.$$

3. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3\,,\ x \mapsto \begin{bmatrix} x^2 \\ \sin x \\ 5\,x + x^3 \end{bmatrix}$,

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 2\,x \\ \cos x \\ 5 + 3\,x^2 \end{bmatrix}.$$

Linearität: Für $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$(\alpha\, f + \beta\, g)'(x^*) = \alpha\, f'(x^*) + \beta\, g'(x^*)\,,$$

falls die Ableitungen auf der rechten Seite existieren.

Für das weitere sei die "hinreichend gute" Differenzierbarkeit der beteiligten Funktionen vorausgesetzt.

Kettenregel: Es seien $g : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2 \subset \mathbb{R}^k$ und $f : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^j$ in den Punkten $x^* \in \Omega_1$ bzw. $y^* = g(x^*) \in \Omega_2$ differenzierbar. Dann ist die Abbildung $h : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto f(g(x))$ im Punkt x^* differenzierbar, und es gilt

$$h'(x^*) = f'(g(x^*))g'(x^*)\,.$$

Dabei ist das Produkt $C = \left[\ \gamma_{rt}\ \right]_{r=1,t=1}^{m\ \ j} = A\,B$ zweier Matrizen $A = \left[\ \alpha_{rs}\ \right]_{r=1,s=1}^{m\ \ k}$ und $B = \left[\ \beta_{st}\ \right]_{s=1,t=1}^{k\ \ j}$ wie folgt erklärt:

$$\gamma_{rt} = \sum_{s=1}^{k} \alpha_{rs}\beta_{st}\,.$$

Richtungsableitung: Für $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^k)$, $x^* \in \Omega$ und $\overrightarrow{n} \in \mathbb{R}^k$ mit $\|\overrightarrow{n}\| = 1$ sowie $F(\tau) := f(x^* + \tau\,\overrightarrow{n})\,,\ \tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)\,,$ folgt aus der Kettenregel

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial \overrightarrow{n}} = F'(0) = f'(x^*)\overrightarrow{n}\,.$$

Taylorentwicklung: Mit ∇ bezeichnen wir den Nabla-Operator

$$\nabla := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \xi_k} \end{bmatrix} .$$

Für $h = \begin{bmatrix} h_1 & \cdots & h_k \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^k$ verstehen wir unter $h \cdot \nabla$ den Ausdruck

$$h \cdot \nabla := \langle h, \nabla \rangle = \sum_{i=1}^{k} h_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} ,$$

der über die Formel

$$\Big[(h \cdot \nabla) f\Big](x) = \sum_{i=1}^{k} h_i \frac{\partial f(x)}{\partial \xi_i}$$

auf Funktionen $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^k$) wirkt, wobei die Abkürzung

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_i} := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \xi_i} \end{bmatrix}$$

verwendet wurde. Es folgt

$$\begin{aligned} (h \cdot \nabla)^2 &:= \left(\sum_{i=1}^{k} h_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) \left(\sum_{j=1}^{k} h_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} h_i h_j \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \xi_j} , \\ (h \cdot \nabla)^j &= \sum_{i_1}^{k} \sum_{i_2}^{k} \cdots \sum_{i_j=1}^{k} h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_j} \frac{\partial^j}{\partial \xi_{i_1} \partial \xi_{i_2} \cdots \partial \xi_{i_j}} . \end{aligned}$$

Es gilt nun

$$f(x^* + h) = f(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j!} \left[(h \cdot \nabla)^j f \right] (x^*) + R(x^*, h) \tag{0.29}$$

mit

$$R(x^*, h) = \int_0^1 \frac{(1-\sigma)^p}{p!} \left[(h \cdot \nabla)^{p+1} f \right] (x^* + \sigma\, h) \, d\sigma .$$

Mittelwertsatz: Dieser ergibt sich im Spezialfall $p = 0$ der Taylorentwicklung,

$$f(x^* + h) - f(x^*) = \int_0^1 \Big[(h \cdot \nabla) f\Big](x^* + \sigma\, h) \, d\sigma .$$

Das Newtonverfahren zur numerischen Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme

Wir betrachten ein System von m Gleichungen mit m Unbekannten

$$f_j(\xi_1, \ldots, \xi_m) = 0\,, \quad j = 1, \ldots, m\,.$$

Mit den üblichen Bezeichnungen können wir dieses System auch kurz in der Form

$$f(x) = \Theta \tag{0.30}$$

schreiben. Geht man nun von einer "hinreichend guten" Näherung x^0 einer Lösung x^* dieser Gleichung aus, so folgt aus (0.29)

$$f(x^*) = \Theta \approx f(x^0) + f'(x^0)(x^* - x^0)\,,$$

so dass man eine Lösung x^1 des linearen Gleichungssystems

$$f(x^0) + f'(x^0)(x^1 - x^0) = \Theta \tag{0.31}$$

als neue Näherung für die Lösung ansehen kann. Bezeichnet man mit A^{-1} die **inverse Matrix** zu der (quadratischen) Matrix $A = \left[\ \alpha_{ji}\ \right]_{j=1,i=1}^{m\ \ m}$, die (falls sie existiert) durch die Beziehung $A^{-1}A = A\,A^{-1} = I$ bestimmt ist, so kann man die Lösung von (0.31) (formal) in der Form

$$x^1 = x^0 - [f'(x^0)]^{-1} f(x^0)$$

schreiben. Auf diese Weise erhalten wir das Newtonverfahren

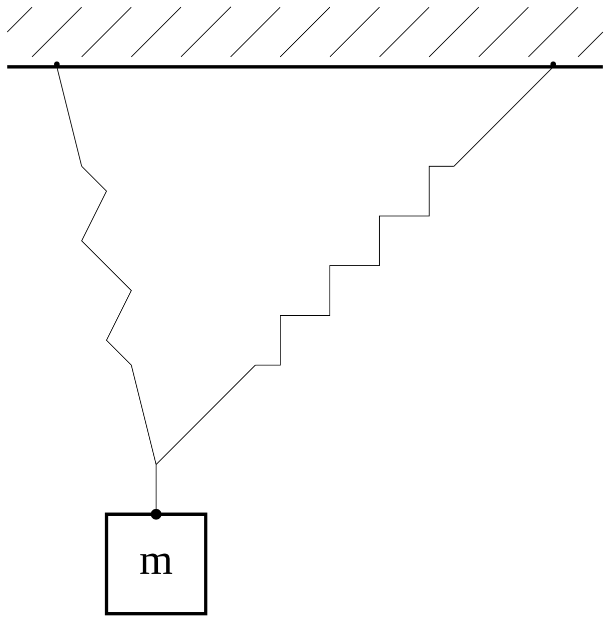
$$x^{n+1} = x^n - [f'(x^n)]^{-1} f(x^n)\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,, \tag{0.32}$$

zur sukzessiven Approximation einer Lösung der Gleichung (des Gleichungssystems) (0.30).

Satz 0.64 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit der Nullstelle $x^* \in \Omega$. Ferner existiere $[f'(x)]^{-1}$ für alle $x \in \Omega$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass die durch (0.32) definierte Punktfolge $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ für einen beliebigen Startwert $x_0 \in U_\varepsilon(x^*)$ gegen die Lösung x^* der Gleichung (0.30) konvergiert. Die Konvergenz ist dabei quadratisch, d.h., es gibt eine Konstante $c > 0$ mit der Eigenschaft*

$$\|x^n - x^*\| \le c\, \left\|x^{n-1} - x^*\right\|^2 .$$

Beispiel 0.65 *Wir betrachten die elastische Aufhängung einer Masse* **m** *an zwei Federn mit den Federkonstanten k_1 und k_2, deren Aufhängungspunkte den Abstand s haben mögen. Die Längen der Federn im unbelasteten Zustand seien R_1 bzw. R_2. Gesucht ist die Größe der Winkel α_1 und α_2 an den Aufhängungspunkten. Mit r_1 und r_2 seien die Längen der Federn im belasteten Zustand bezeichnet.*



Kräftegleichgewicht:

$$k_1(r_1 - R_1)\cos\alpha_1 = k_2(r_2 - R_2)\cos\alpha_2$$
$$k_1(r_1 - R_1)\sin\alpha_1 + k_2(r_2 - R_2)\sin\alpha_2 = m \cdot g$$

Im Dreieck gilt:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} \;\Rightarrow\; r_2 = \frac{r_1 \sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$
$$r_1\cos\alpha_1 + r_2\cos\alpha_2 = s \;\Rightarrow\; r_1\cos\alpha_1 + \frac{r_1\sin\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2} = s$$
$$\Rightarrow\; r_1 = \frac{s\cdot\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}\,,\; r_2 = \frac{s\cdot\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$$

Wir erhalten also zur Bestimmung der Winkel α_1 und α_2 das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} k_1\left(\frac{s\cdot\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)} - R_1\right)\cos\alpha_1 - k_2\left(\frac{s\cdot\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)} - R_2\right)\cos\alpha_2 &= 0\,,\\ k_1\left(\frac{s\cdot\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)} - R_1\right)\sin\alpha_1 + k_2\left(\frac{s\cdot\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)} - R_2\right)\sin\alpha_2 &= m\cdot g \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} k_1[s\cdot\sin\alpha_2 - R_1\sin(\alpha_1+\alpha_2)]\cos\alpha_1 - k_2[s\cdot\sin\alpha_1 - R_2\sin(\alpha_1+\alpha_2)]\cos\alpha_2 &= 0\,,\\ k_1[s\cdot\sin\alpha_2 - R_1\sin(\alpha_1+\alpha_2)]\sin\alpha_1 &\\ +k_2[s\cdot\sin\alpha_1 - R_2\sin(\alpha_1+\alpha_2)]\sin\alpha_2 - m\cdot g\cdot\sin(\alpha_1+\alpha_2) &= 0\,, \end{aligned}$$

welches wir auch in der Form

$$f(\alpha) = \Theta$$

bzw.

$$f_1(\alpha_1, \alpha_2) = 0\,, \quad f_2(\alpha_1, \alpha_2) = 0$$

schreiben können.

Algorithmische Aufbereitung:
Eingangsdaten:

$$s, R_1, R_2, m, k_1, k_2, g$$

Definitionen:

$$\alpha := \alpha_1 + \alpha_2\,,$$

$$s_1 := \sin\alpha_1\,,\ s_2 := \sin\alpha_2\,,\ s_\alpha := \sin\alpha\,,$$

$$c_1 := \cos\alpha_1\,,\ c_2 := \cos\alpha_2\,,\ c_\alpha := \cos\alpha\,,$$

$$g_1 := k_1(s \cdot s_2 - R_1 s_\alpha)\,,\ g_2 := k_2(s \cdot s_1 - R_2 s_\alpha)\,,$$

$$f_1 := g_1 c_1 - g_2 c_2\,,\ f_2 = g_1 s_1 + g_2 s_2 - m \cdot g \cdot s_\alpha\,,$$

$$g_{11} := -k_1 R_1 c_\alpha\,,\ g_{12} := k_1(s \cdot c_2 - R_1 c_\alpha)\,,\ g_{21} := k_2(s \cdot c_1 - R_2 c_\alpha)\,,\ g_{22} := -k_2 R_2 c_\alpha\,,$$

$$f_{11} := g_{11} c_1 - g_1 s_1 - g_{21} c_2\,,\ f_{12} := g_{12} c_1 - g_{22} c_2 + g_2 s_2\,,$$

$$f_{21} := g_{11} s_1 + g_1 c_1 + g_{21} s_2 - m \cdot g \cdot c_\alpha\,,\ f_{22} := g_{12} s_1 + g_{22} s_2 + g_2 c_2 - m \cdot g \cdot c_\alpha$$

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha_1 \\ \Delta\alpha_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Lösung:

$$d := f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21}\,,$$

$$\Delta\alpha_1 := (-f_1 f_{22} + f_{12} f_2)/d\,, \quad \Delta\alpha_2 := (-f_{11} f_2 + f_1 f_{21})/d$$

Neue Näherung:

$$\alpha_1 := \alpha_1 + \Delta\alpha_1\,,\ \alpha_2 := \alpha_2 + \Delta\alpha_2$$

0.10 Übungsaufgaben

1. Man bestimme alle partiellen Ableitungen erster Ordnung folgender Funktionen:
   (a) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (s,t) \mapsto s^2 t - e^{s\,t}\,,$
   (b) $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (\xi_1, \xi_2) \mapsto \sin(\xi_1^2\, \xi_2^5)\,,$
   (c) $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (s,t) \mapsto \sqrt{s^2 + t^3}\,,$
   (d) $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mapsto \xi_1^2 + \xi_2^5 + \xi_1\, \xi_3^3 + 2\,,$
   (e) $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (x,y) \mapsto x^y\,,$

(f) **(HA)** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ \ (s,t) \mapsto s\,e^t\,,$

(g) **(HA)** $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ \ (u,v) \mapsto \sin(u^2+v^3)\,,$

(h) **(HA)** $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (s,t) \mapsto e^s\cos(s\,t) + \dfrac{s}{1+t^2}\,.$

2. Man zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\quad (s,t) \mapsto \begin{cases} s\left(1+\cos\dfrac{\pi\,s}{t}\right) & : \ |t| > |s|\,, \\ 0 & : \ \text{sonst}\,, \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ stetig aber nicht differenzierbar ist. Existieren die partiellen Ableitungen erster Ordnung im Punkt $(0,0)$?

3. Man gebe die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $(s^*, t^*, f(s^*,t^*))$ an:

(a) $f(s,t) = s^2 - t^2\,,\ \ s^* = 2\,,\ t^* = -2\,,$ (b) **(HA)** $f(s,t) = s^2\sin(t)\,,\ \ s^* = 2\,,\ t^* = \dfrac{\pi}{3}\,.$

4. Berechnen Sie $f'(x)\,,\ x = \begin{bmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_k \end{bmatrix}^T$:

(a) $f(x) = \begin{bmatrix} \xi_1^2\,\xi_2^3 \\ \xi_1 - \xi_2^2 \end{bmatrix}\,,$ (b) $f(x) = \begin{bmatrix} \xi_1\cos(\xi_2)\sin(\xi_3) \\ \xi_1^2 - \tan(\xi_3) \end{bmatrix}\,,$

(c) **(HA)** $f(x) = \xi_2^2 + \tan(\xi_1\xi_2)\,,$ (d) **(HA)** $f(x) = \begin{bmatrix} \xi_1 + e^{\cos\xi_2} \\ \sin(\xi_1) \\ \xi_1\tan(\xi_2) \end{bmatrix}\,.$

5. Geben Sie die Taylorentwicklung (Abschnitt 0.9.4, Gleichung (0.29), vgl. auch Abschnitt 0.9.3, Punkt 6) für $p = 1$ (ohne Restglied) folgender Funktionen im Punkt x^* an:

(a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ \ (\xi_1,\xi_2,\xi_3) \mapsto \xi_1\,\xi_2^2\,\xi_3^3\,,\ \ x^* = (3,-2,1)\,,$

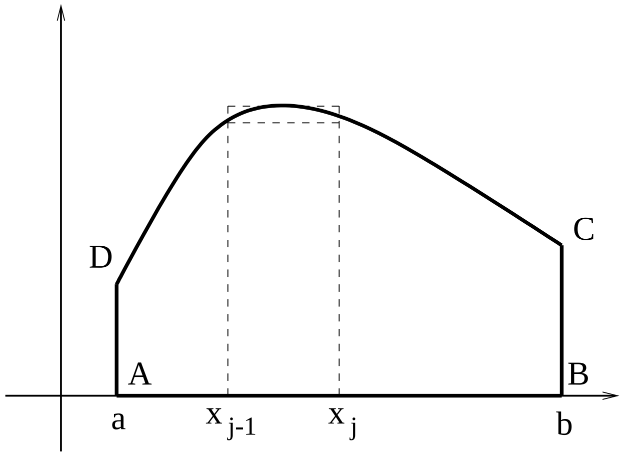
(b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\,,\ \ \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \xi_1\xi_2 \\ e^{\xi_1} + e^{2\xi_2} \end{bmatrix}\,,\ \ x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\,,$

(c) **(HA)** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\,,\ \ \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \xi_1^2\,\xi_2^3 \\ \xi_1 - \xi_2^2 \end{bmatrix}\,,\ \ x^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\,.$

0.11 Integralrechnung für reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen

0.11.1 Der Flächeninhalt unter dem Graphen einer Funktion

Es sei eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq 0\,,\ x \in [a,b]\,,$ gegeben. Wir stellen uns die Frage, wie man den Flächeninhalt des krummlinigen Trapezes mit den Eckpunkten $A = (a,0)\,,\ B = (b,0)\,,\ C = (b,f(b))$ und $D = (a,f(a))$ berechnen könnte.



Dazu wählen wir eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ des Intervalls $[a, b]$, d.h. $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$, und definieren für $j = 1, \ldots, n$

$$m_j := \inf\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\}\ , \quad M_j := \sup\{f(x) : x_{j-1} \leq x \leq x_j\}\ , \quad \Delta x_j := x_j - x_{j-1}$$

und

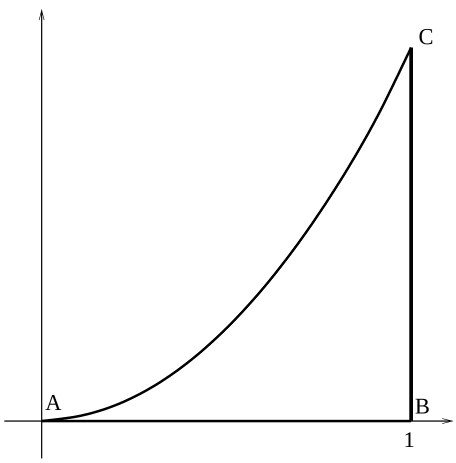
$$\underline{s}(f, Z) := \sum_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j\ , \quad \overline{s}(f, Z) := \sum_{j=1}^{n} M_j \Delta x_j\ .$$

Definition 0.66 *Die Menge aller Zerlegungen* $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ *beliebig, des Intervalls* $[a, b]$ *bezeichnen wit mit* $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}[a, b]$. *Die Zahl* $d(Z) := \max\{\Delta x_j : j = 1, \ldots, n\}$ *nennt man* **Durchmesser** *der Zerlegung* $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. *Die Zahlen* $\underline{s}(f, Z)$ *und* $\overline{s}(f, Z)$ *heißen* **Darbouxsche Unter-** *bzw.* **Obersumme** *der Funktion* f *bezüglich der Zerlegung* Z .

Beispiel 0.67 *Für* $f(x) = x^2$, $a = 0$ *und* $b = 1$ *sowie*

$$Z_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

ist



$$
\begin{aligned}
\underline{s}(f, Z_n) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{6}, \\
\overline{s}(f, Z_n) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{6},
\end{aligned}
$$

also

$$
\lim_{n\to\infty} \underline{s}(f, Z_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{s}(f, Z_n) = \frac{1}{3}.
$$

Wir vermuten also, dass der Flächeninhalt des krummlinigen Dreiecks ABC gleich $\frac{1}{3}$ *ist.*
Anstelle der Darbouxschen Ober- und Untersummen könnte man auch sog. Riemannsche Integralsummen betrachten, d.h.

$$
\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j\,, \tag{0.33}
$$

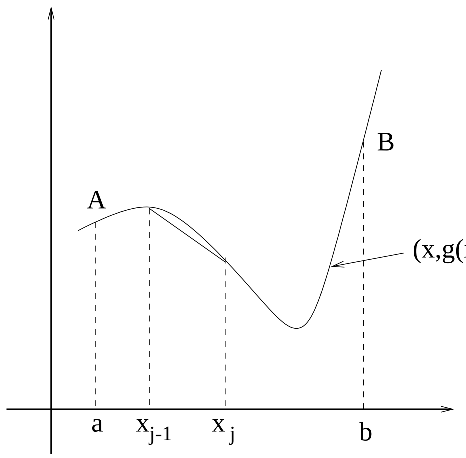
wobei $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ *beliebig gewählt werden kann. Wählen wir in unserem Beispiel als* ξ_j *die Mittelpunkte der jeweiligen Teilintervalle, so erhalten wir*

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{j}{n} + \frac{j-1}{n}\right)\right]^2 \frac{1}{n} &= \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n}\left(j - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n}\left(j^2 - j + \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2\,n^3} + \frac{n}{4\,n^3} \longrightarrow \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

für $n \longrightarrow \infty$.

0.11.2 Berechnung der Länge einer Kurve

Wir wollen die Länge einer Kurve vom Punkt A zum Punkt B berechnen, die durch den Graphen einer Funktion $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist.



Wir zerlegen die Kurve von $A = (a, g(a))$ nach $B = (b, g(b))$ in Teilkurven, was einer Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ entspricht: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Die Länge ℓ der Kurve können wir nun näherungsweise berechnen:

$$\begin{aligned} \ell &\approx \sum_{j=1}^{n} \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + [g(x_j) - g(x_{j-1})]^2} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sqrt{1 + [g'(\xi_j)]^2}\,\Delta x_j\,, \quad x_{j-1} < \xi_j < x_j\,. \end{aligned}$$

Wir erhalten also wieder eine Summe der Gestalt (0.33) für die Funktion $f(x) = \sqrt{1 + [g'(x)]^2}$.

0.11.3 Integrierbare Funktionen

Definition 0.68 *Es sei* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine beschränkte Funktion, d.h.* $\exists\, M \in \mathbb{R} : |f(x)| \le M$ $\forall\, x \in [a, b]$. *Die Zahlen*

$$\underline{S}(f) = \sup\{\underline{s}(f, Z) : Z \in \mathcal{Z}\} \quad \textit{und} \quad \overline{S}(f) = \inf\{\overline{s}(f, Z) : Z \in \mathcal{Z}\}$$

heißen **unteres** *bzw.* **obereres Darbouxsches Integral** *von* f *über dem Intervall* $[a, b]$.

Bemerkung 0.69 *Wegen* $\underline{s}(f, Z) \le M(b - a)$ *und* $\overline{s}(f, Z) \ge -M(b - a)$ *sind* $\underline{S}(f)$ *und* $\overline{S}(f)$ *endliche Zahlen. Es gilt* $\underline{S}(f) \le \overline{S}(f)$.

Definition 0.70 *Eine beschränkte Funktion* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *heißt* **integrierbar** *über* $[a, b]$, *wenn* $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$ *gilt. In diesem Fall schreiben wir*

$$\underline{S}(f) = \overline{S}(f) =: \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Die Menge dieser Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{R}[a, b]$.

Beispiel 0.71 *Die Riemannsche Funktion* $r : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & , & \text{falls } x \text{ rational,} \\ 0 & , & \text{falls } x \text{ irrational,} \end{array} \right\}$ *ist nicht integrierbar, da* $\underline{S}(r) = 0$ *und* $\overline{S}(r) = 1\,.$

Beispiel 0.72 *Jede stetige Funktion* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist integrierbar.*

Beispiel 0.73 *Jede monotone Funktion* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist integrierbar.*

Satz 0.74 *Es seien* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *beliebig. Dann sind auch* $\alpha\, f + \beta\, g \in \mathcal{R}[a,b]$ *und* $f\, g \in \mathcal{R}[a,b]\,,$ *wobei*

$$\int_a^b [\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)]\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

Definition 0.75 *Für* $b \le a$ *definieren wir*

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx\,,$$

insbesondere ist

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0\,.$$

Satz 0.76 *Es seien* $f \in \mathcal{R}[\alpha,\beta]$ *und* $a, b, c \in [\alpha,\beta]\,.$ *Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx\,.$$

Folgerung 0.77 *Für* $a < b$ *und* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ *gilt:*

1. $f(x) \ge 0\ \forall\, x \in [a,b] \implies \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \ge 0$

2. $f(x) \le g(x)\ \forall\, x \in [a,b] \implies \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx$

3. $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ *und* $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx$

4. $m \le f(x) \le M\ \forall\, x \in [a,b] \implies m(b-a) \le \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \le M(b-a)$

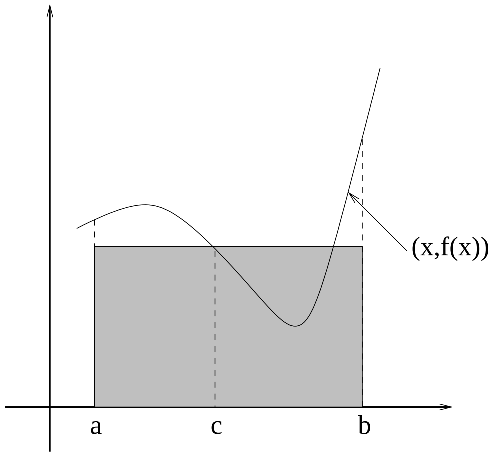
5. **(Erster Mittelwertsatz der Integralrechnung)** *Ist* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig, so existiert ein* $c \in (a,b)$ *mit der Eigenschaft*

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a)\,.$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht der Inhalt der Fläche unter der Kurve

$$\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$$

($falls$ $f(x) \geq 0\,,\ x \in [a, b]$) *und auf der rechten Seite der Flächeninhalt eines Rechtecks* (*siehe Abb.*).



Zum ersten MWS der Integralrechnung

6. **(Zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung)** *Sind* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und* $g \in \mathcal{R}[a, b]\,,\ g(x) \geq 0\ \forall\, x \in [a, b]$ (*oder* $g(x) \leq 0\ \forall\, x \in [a, b]$), *so existiert ein* $c \in (a, b)$ *mit der Eigenschaft*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

0.11.4 Der Begriff der Stammfunktion

Für eine Funktion $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und $x \in [a, b]$ definieren wir

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

Sind $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $x, x + h \in (a, b)$, so ergibt sich aus Satz 0.76 und aus Folgerung 0.77, 5.

$$\Phi(x + h) = \Phi(x) + \int_x^{x+h} f(t)\,dt = \Phi(x) + f(x + \theta h)h\,, \quad 0 < \theta < 1\,,$$

d.h. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x + h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x + \theta h) = f(x)$, also $\Phi'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in (a, b)$.

Definition 0.78 *Eine auf* $[a, b]$ *stetige und auf* (a, b) *differenzierbare Funktion* $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit der Eigenschaft*

$$F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in (a, b)$$

nennt man **Stammfunktion** *zu* $f(x)$ *auf* $[a, b]$.

Folgerung 0.79

1. *Jede auf* $[a,b]$ *stetige Funktion besitzt dort eine Stammfunktion.*

2. *Sind* $F_1, F_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *zwei Stammfunktionen zu* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *so folgt für* $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$ *die Gleichnung* $F'(x) = 0 \; \forall \, x \in (a,b)$ *und somit aus dem MWS der Differentialrechnung* $F(x) - F(a) = F'(\xi)(x-a) = 0$, *d.h.* $F_1(x) = F_2(x) + F(a) \; \forall \, x \in [a,b]$. *Zwei Stammfunktionen zu einer Funktion können sich also nur durch eine additive Konstante unterscheiden.*

3. **(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)** *Sind* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und* $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine Stammfunktion zu* f, *so ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b \,,$$

denn nach 2. gilt $\Phi(x) = F(x) + c \; \forall \, x \in [a,b]$ *und* $0 = \Phi(a) = F(a) + c$, *d.h.* $c = -F(a)$, *woraus* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) = F(b) - F(a)$ *folgt.*

Beispiel 0.80

1. $0 < a < b$, $\alpha \neq -1$: $\displaystyle\int_a^b x^\alpha\,dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_a^b = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

2. $0 < a < b$: $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x} = [\ln x]_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

0.11.5 Integrationsmethoden

Die Bestimmung aller Stammfunktionen $F(x) + c$ auf einem gewissen Intervall (a,b) zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ nennt man auch **unbestimmte Integration**. Man schreibt

$$F(x) + c = \int f(x)\,dx \,,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante bezeichnet. Es gilt also

$$F(x) + c = \int f(x)\,dx \iff F'(x) = f(x) \; \forall \, x \in (a,b) \,.$$

Grundintegrale

1. Aus $\dfrac{d}{dx}\left(x^{\alpha+1}\right) = (\alpha+1)x^\alpha$ folgt für $\alpha \neq -1$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\,,$$

wobei

$$x \in [a,b] \subset \begin{cases} (-\infty,\infty) & , \quad \alpha \in \{0,1,2,\ldots\}\,, \\ (-\infty,0)\cup(0,\infty) & , \quad \alpha \in \{-2,-3,-4,\ldots\}\,, \\ (0,\infty) & , \quad \alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

2. Für $x \in (-\infty,0)\cup(0,\infty)$ gilt $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = \dfrac{1}{|x|}\operatorname{sgn} x = \dfrac{1}{x}$, also

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c\,.$$

3. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + c\,, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + c$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$

5. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + c$

Einfachste Integrationsregeln

1. $\alpha \in \mathbb{R}:\qquad \displaystyle\int \alpha\,f(x)\,dx = \alpha\int f(x)\,dx$

2. $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

3. Sind $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + c$ und $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\frac{d}{dx}F(\alpha x+\beta) = \alpha F'(\alpha x+\beta) = \alpha f(\alpha x+\beta)\,,$$

also, falls $\alpha \neq 0$,

$$\int f(\alpha x+\beta)\,dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta) + c\,.$$

Beispiel 0.81

1. $\displaystyle\int \left(x^{\frac{1}{3}}+2\right)^2 dx = \int \left(x^{\frac{2}{3}} + 4\,x^{\frac{1}{3}} + 4\right) dx = \frac{3}{5}\,x^{\frac{5}{3}} + 3\,x^{\frac{4}{3}} + 4\,x + c$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + c$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + c$

4. $\displaystyle\int \frac{2\,x^2 - 3\,x + 1}{x+1}\,dx = \int \left(2\,x - 5 + \frac{6}{x+1}\right) dx = x^2 - 5\,x + 6\ln|x+1| + c$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-5} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\int \left(\frac{1}{x-\sqrt{5}} - \frac{1}{x+\sqrt{5}}\right) dx = \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + c$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-5\,x+6} = \int \frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{x-2} = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + c$

7. $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + c$

Die Substitutionsregel

Es seien $\int g(t)\,dt = G(t) + c$ und $z(x)$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\frac{d}{dx}\,G(z(x)) = G'(z(x))z'(x) = g(z(x))z'(x)\,,$$

also

$$\int g(z(x))z'(x)\,dx = G(z(x)) + c\,.$$

Ist $z'(x) \neq 0$ in einem gewissen Intervall, so folgt mit $f(x) = g(z(x))z'(x)$ bzw. $f(x(z)) = g(z)\,\dfrac{1}{x'(z)}$ die Beziehung

$$\int f(x)\,dx = G(z(x)) + c = \int g(z)\,dz = \int f(x(z))x'(z)\,dz\,.$$

<u>Regel</u>: Substituiere $x = x(z)$ und ersetze dx durch $x'(z)\,dz$!

$$\frac{dx}{dz} = x'(z) \implies dx = x'(z)\,dz$$

Beispiel 0.82

1. $\displaystyle\int \sin^2 x\,\cos x\,dx = \left|\begin{array}{ccc} z & = & \sin x \\ dz & = & \cos x\,dx \end{array}\right| = \int z^2\,dz = \frac{z^3}{3} + c = \frac{1}{3}\sin^3 x + c$

2. $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = \left|\begin{array}{ccc} z & = & \cos x \\ dz & = & -\sin x\,dx \end{array}\right|$

$$= -\int (1-z^2)\,dz = \frac{z^3}{3} - z + c = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + c$$

3. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \left|\begin{array}{ccc} z & = & f(x) \\ dz & = & f'(x)\,dx \end{array}\right| = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + c = \ln|f(x)| + c$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \left|\begin{array}{ccc} x & = & \tan z \\ dx & = & (1+\tan^2 z)\,dz = (1+x^2)\,dz \end{array}\right| = \int \frac{dz}{1+\tan^2 z} = \int \cos^2 z\,dz$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2z)\,dz = \frac{z}{2} + \frac{1}{4}\sin 2z + c = \frac{1}{2}(z + \sin z\cos z + c) = \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right) + c$$

Partielle Integration

Aus der Produktregel für die Differentiation folgt

$$u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x)\,,$$

also

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx\,. \tag{0.34}$$

Beispiel 0.83

1. $\displaystyle\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c$

2. $\displaystyle\int \ln|x|\,dx = x\ln|x| - \int dx = x\ln|x| - x + c$

3. $\displaystyle\int \sin x\cos x\,dx = \sin^2 x - \int \cos x\sin x\,dx \implies \int \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + c$

4. $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos x\,dx$

   $\displaystyle\implies \int e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + c$

5. *Wir setzen* $\displaystyle J_n(x) = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $n = 1, 2, \ldots$ *Dann gilt*

$$J_1(x) = \arctan x + c$$

und nach Beispiel 0.82, 4.

$$J_2(x) = \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right) + c\,.$$

Mit $u(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^n}$ *und* $v(x) = x$ *erhalten wir aus (0.34)*

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \int u(x)v'(x)dx \\ &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + \int \frac{2n\, x^2\, dx}{(x^2+1)^{n+1}} \\ &= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\Big[J_n(x) - J_{n+1}(x)\Big] \end{aligned}$$

und somit die Rekursionsformel

$$J_{n+1}(x) = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}\, J_n(x)\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Integration rationaler Funktionen

Unter einer rationalen Funktion verstehen wir eine Funktion

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\,,$$

die sich als Quotient zweier Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ (mit reellen Koeffizienten) schreiben lässt. Ein solcher Quotient kann immer in der Form

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

mit Polynomen $P_0(x)$ und $P_1(x)$ dargestellt werden, wobei der Grad des Polynoms $P_1(x)$ kleiner als der Grad des Polynoms $Q(x)$ ist. Jedes Polynom $Q(x)$ gestattet eine Zerlegung in lineare und quadratische Faktoren der Gestalt

$$Q(x) = a(x-a_1)^{n_1} \cdots (x-a_k)^{n_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \cdots (x^2 + p_j x + q_j)^{m_j}\,,$$

wobei $a, a_i, p_i, q_i \in \mathbb{R}$ und $p_i^2 - 4\, q_i < 0$ gilt. Damit lässt sich die **Partialbruchzerlegung**

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{n_i} \frac{A_{i\ell}}{(x-a_i)^\ell} + \sum_{i=1}^{j} \sum_{\ell=1}^{m_i} \frac{B_{i\ell}x + C_{i\ell}}{(x^2+p_i x+q)^\ell}$$

mit gewissen reellen Zahlen $A_{i\ell}$, $B_{i\ell}$, $C_{i\ell}$ gewinnen.

<u>Fazit</u>: Die Integration rationaler Funktionen kann stets auf Integrale der Form

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} \quad \text{und} \quad \int \frac{B\,x + C}{(x^2 + p\,x + q)^n}\, dx\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,, \ p^2 - 4\,q < 0\,,$$

zurückgeführt werden:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + c$

2. $n = 2, 3, \dots :$ $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{1}{1-n}(x-a)^{1-n} + c$

3. Unter Verwendung von

$$x^2 + p\,x + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\left[\left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\right)^2 + 1\right]$$

erhalten wir

$$\int \frac{B\,x + C}{x^2 + p\,x + q}\,dx = \frac{B}{2}\int \frac{2\,x + p}{x^2 + p\,x + q}\,dx + \int \frac{C - \frac{B\,p}{2}}{x^2 + p\,x + q}\,dx$$

$$= \frac{B}{2}\,\ln|x^2 + p\,x + q| + \frac{C - \frac{B\,p}{2}}{q - \frac{p^2}{4}}\int \frac{dx}{\left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{B}{2}\,\ln|x^2 + p\,x + q| + \frac{C - \frac{B\,p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\,\arctan\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + c\,.$$

4. $n = 2, 3, \dots :$

$$\int \frac{B\,x + C}{(x^2 + p\,x + q)^n}\,dx = \frac{B}{2}\int \frac{2\,x + p}{(x^2 + p\,x + q)^n}\,dx + \int \frac{C - \frac{B\,p}{2}}{(x^2 + p\,x + q)^n}\,dx$$

$$= \frac{B}{2(1-n)}\,(x^2 + p\,x + q)^{1-n} + \frac{C - \frac{B\,p}{2}}{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)^n}\int \frac{dx}{\left[\left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\right)^2 + 1\right]^n}$$

$$= \frac{B}{2(1-n)}\,(x^2 + p\,x + q)^{1-n} + \frac{C - \frac{B\,p}{2}}{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)^{n - \frac{1}{2}}}\,J_n(z)$$

mit $z = \dfrac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}$ (vgl. Bsp. 0.83, 5.)

Beispiel 0.84 $\displaystyle\int \frac{2\,x^2+2\,x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx$

Ansatz für Partialbruchzerlegung: $\displaystyle\frac{2\,x^2+2\,x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B\,x+C}{x^2+1} + \frac{D\,x+E}{(x^2+1)^2}$

$$\begin{aligned}
2x^2+2x+13 &= A(x^2+1)^2 + (B\,x+C)(x-2)(x^2+1) + (D\,x+E)(x-2)\\
&= A(x^4+2\,x^2+1) + (B\,x+C)(x^3-2\,x^2+x-2) + D\,x^2 + (E-2\,D)x - 2\,E\\
&= (A+B)x^4 + (C-2\,B)x^3 + (2\,A-2\,C+B+D)x^2\\
&\qquad +(C-2\,B+E-2\,D)x + A - 2\,C - 2\,E
\end{aligned}$$

Koeffizientenverleich $\Longrightarrow$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
A & + & B & & & & & & & = & 0\\
 & - & 2\,B & + & C & & & & & = & 0\\
2\,A & + & B & - & 2\,C & + & D & & & = & 2\\
 & - & 2\,B & + & C & - & 2\,D & + & E & = & 2\\
A & & & - & 2\,C & & & - & 2\,E & = & 13
\end{array}$$

$\Longrightarrow\ A=1\,,\ B=-1\,,\ C=-2\,,\ D=-3\,,\ E=-4\ \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\int \frac{2\,x^2+2\,x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx &= \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx - \int \frac{3\,x+4}{(x^2+1)^2}\,dx\\
&= \ln|x-2| - \frac{1}{2}\int \frac{2\,x}{x^2+1}\,dx - 2J_1(x) - \frac{3}{2}\int \frac{2\,x}{(x^2+1)^2} - 4J_2(x)\\
&= \ln|x-2| - \frac{1}{2}\,\ln|x^2+1| - 2\,\arctan x + \frac{3}{3}\,\frac{1}{x^2+1}\\
&\qquad -2\left(\arctan x + \frac{x}{x^2+1}\right) + c\\
&= \ln\frac{|x-2|}{\sqrt{x^2+1}} - 4\,\arctan x - \frac{2\,x-\frac{3}{2}}{x^2+1} + c
\end{aligned}$$

Beispiel 0.85 $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^4+1}\,dx = \int \frac{x(x^4+1)-x}{x^4+1}\,dx = \int x\,dx - \int \frac{x}{x^4+1}\,dx$

Es gilt

$$x^4+1 = x^4+2\,x^2+1-2\,x^2 = (x^2+1)^2 - \left(\sqrt{2}\,x\right)^2 = \left(x^2+\sqrt{2}\,x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}\,x+1\right)\,.$$

Damit kann man die Partialbruchzerlegung von $\displaystyle\frac{x}{x^4+1}$ *finden. Hier kommt man aber schneller mittels Substitution zum Ziel:*

$$\int \frac{x}{x^4+1}\,dx = \left|\begin{array}{rcl} x^2 & = & z\\ 2\,x\,dx & = & dz\end{array}\right| = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2}\,\arctan z + c = \frac{1}{2}\,\arctan(x^2) + c$$

Integration trigonometrischer Funktionen

Eine Funktion der Gestalt

$$R(x,y) = \frac{\sum\limits_{i,j=0}^{m} \alpha_{ij} x^i y^j}{\sum\limits_{i,j=0}^{n} \beta_{ij} x^i y^j}$$

mit $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{R}$ nennt man rationale Funktion in den Veränderlichen x und y. Wir betrachten Integranden der Form $R(\cos x, \sin x)$. Mittels der Substitution $t = \tan \frac{x}{2}$ transformieren wir das Integral $\int R(\cos x, \sin x)\, dx$ in ein Integral mit rationalem Integranden. Es gilt nämlich

$$dt = \frac{1}{2}(1+t^2)\, dx\,, \quad \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2\, \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2\,t}{1+t^2}\,,$$

$$\cos x = 2\, \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2 \frac{x}{2}} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

und somit

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx = 2 \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2\,t}{1+t^2} \right) \frac{dt}{1+t^2}\,.$$

<u>Spezialfälle</u>:

1. $R(x,y) = R_1(x^2, y)x$:

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx = \int R_1(1-\sin^2 x, \sin x) \cos x\, dx = \left| \begin{array}{rcl} t &=& \sin x \\ dt &=& \cos x\, dx \end{array} \right|$$

$$= \int R_1(1-t^2, t)\, dt$$

2. $R(x,y) = R_2(x, y^2)y$: analog zu 1. mit $t = \cos x$

3. $R(x,y) = R_3(x^2, x^{-1}y)$:

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx = \int R_3(\cos^2 x, \tan x)\, dx$$

$$= \int R_3\left(\frac{1}{1+\tan^2 x}, \tan x \right) dx = \left| \begin{array}{rcl} t &=& \tan x \\ dt &=& (1+t^2)\, dx \end{array} \right| = \int R_3\left(\frac{1}{1+t^2}, t \right) \frac{dt}{1+t^2}$$

Beispiel 0.86

1. $$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\tan^4 x \cos^6 x} = \left| \begin{array}{rcl} t & = & \tan x \\ dt & = & (1+t^2)\,dx \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4}\,dt = \int \left(1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}\right)\,dt = t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3\,t^3} + c = \tan x - 2\,\cot x - \frac{1}{3}\,\cot^3 x + c$$

2. $$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \left| \begin{array}{rcl} t & = & \tan\frac{x}{2} \\ \cos x & = & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ dt & = & \dfrac{1}{2}(1+t^2)\,dx \end{array} \right| = \int \frac{2}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{dt}{1+t^2}$$

$$= 2\int \frac{dt}{3+t^2} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} = \left| \begin{array}{c} z = \dfrac{t}{\sqrt{3}} \\ dz = \frac{dt}{\sqrt{3}} \end{array} \right| = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\arctan\frac{t}{\sqrt{3}} + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,\tan\frac{x}{2}\right) + c$$

3. $$\int \frac{dx}{1+2\,\cos x} = \left| \begin{array}{rcl} t & = & \tan\frac{x}{2} \\ \cos x & = & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ dt & = & \dfrac{1}{2}(1+t^2)\,dx \end{array} \right| = 2\int \frac{dt}{3-t^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \left(\frac{1}{\sqrt{3}-t} + \frac{1}{\sqrt{3}+t}\right)\,dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\ln\left|\frac{\sqrt{3}+t}{\sqrt{3}-t}\right| + c = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}-\tan\frac{x}{2}}\right| + c$$

4. $$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x - 2\int x\,\sin x\,dx = x^2 \sin x + 2\,x\cos x - 2\int \cos x\,dx$$

$$= x^2 \sin x + 2\,x\,\cos x - 2\,\sin x + c$$

5. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\int e^{\alpha\,x} \cos\beta\,x\,dx = \frac{1}{\beta} e^{\alpha\,x} \sin\beta\,x - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha\,x} \sin\beta\,x\,dx$$

$$= \frac{1}{\beta}\,e^{\alpha\,x}\sin\beta\,x + \frac{\alpha}{\beta^2}\,e^{\alpha\,x}\cos\beta\,x - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha\,x}\cos\beta\,x\,dx$$

$$\Longrightarrow \int e^{\alpha\,x}\cos\beta\,x\,dx = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\,e^{\alpha\,x}(\beta\,\sin\beta\,x + \alpha\,\cos\beta\,x) + c$$

0.12 Übungsaufgaben

1. Ermitteln Sie folgende unbestimmte Integrale (ggf. Gültigkeitsbereich der Stammfunktion angeben):

   (a) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$ (b) $\int \frac{e^{3x}-1}{e^x-1}\,,dx$ (c) **(HA)** $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx\,,$

   (d) **(HA)** $\int \tan^2 x\,dx\,.$

2. Bestimmen Sie mit Hilfe von Substitutionen:

   (a) **(HA)** $\int (3x+4)^2\,dx\,,$ (b) $\int x^2\sqrt[3]{x^3-8}\,dx\,,$ (c) **(HA)** $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,,$

   (d) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx\,,$ (e) **(HA)** $\int \tan x\,dx\,,$ (f) $\int \frac{dx}{\sin x}\,,$ (g) **(HA)** $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}\,,$

   (h) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}\,,$ (i) $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}\,,$ (j) **(HA)** $\int \frac{e^x}{2+e^x}\,dx\,.$

3. Berechnen Sie mittels partieller Integration:

   (a) $\int x^2 e^{-2x}\,dx\,,$ (b) **(HA)** $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx\,,$ (c) **(HA)** $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx\,,$

   (d) $\int \arctan x\,dx\,,$ (e) **(HA)** $\int \ln x\,dx$ (f) $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ $(a, b \neq 0)$

   (g) $\int \arcsin x\,dx$ (h) $\int \sin^2 x dx.$

4. Ermitteln Sie $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int\limits_0^x \arctan t\,dt\,.$

5. **(HA)** Welches Vorzeichen hat $\int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx$? (Das Integral muss nicht berechnet werden.)

6. Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels Partialbruchzerlegung:

   (a) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx\,,$ (b) $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx\,,$ (c) $\int \frac{dx}{x^3+1}\,,$

   (d) **(HA)** $\int \frac{dx}{x^4+1}\,.$

7. Ermitteln Sie folgende Integrale durch Überführung in Integrale über rationale Funktionen mittels geeigneter Substitutionen:

   (a) $\int \frac{dx}{5+3\cos x}\,,$ (b) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}\,,$ (c) **(HA)** $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}\,,$

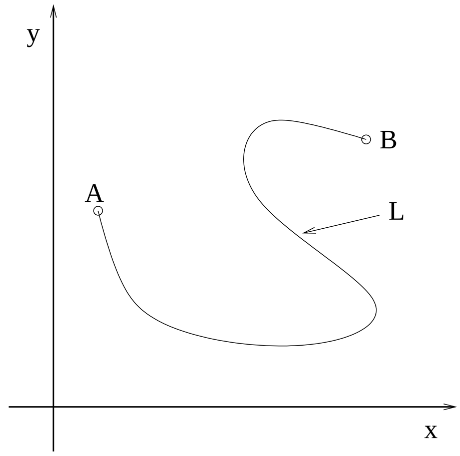
   (d) $\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx\,,$ (e) **(HA)** $\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx\,.$

8. Wie man leicht sieht, gilt $\int_0^\pi \sin x \, , dx = 2$. Substituiert nun $t = \sin x$, $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, so folgt $\int_0^\pi \sin x \, dx = \int_0^0 \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \, dt = 0$. Wo steckt der Fehler?
9. Die Form einer durchhängenden Kette wird durch $f(x) = \cosh x$ beschrieben. Berechnen Sie die Länge einer Kette, die zwischen den Stellen $x = -a$ und $x = a$ aufgehängt ist.
10. Zeigen Sie die Gültigkeit der Abschätzung
$$\frac{1}{2} \le \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} \, dx \le \frac{1}{\sqrt{2}} \, .$$
11. Die Tschebyscheff-Polynome erster Art sind durch
$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \, , \quad T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos x) \, , \; n = 1, 2, \ldots \, ,$$
definiert, wobei $-1 \le x \le 1$ ist. Man zeige, dass
$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \delta_{nm} \, , \quad n, m = 0, 1, 2, 3, \ldots \, ,$$
gilt.
12. Leiten Sie eine Rekursionsformel für das Integral $S_n := \int \sin^n x \, dx$ her.

0.13 Einige Anwendungen des Integralbegriffs

0.13.1 Länge und Schwerpunkt einer Kurve

Eine Kurve L (in der x-y-Ebene) mit dem Anfangspunkt A und dem Endpunkt B sei durch die Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a, b]$, gegeben, d.h. $A = (\varphi(a), \psi(a))$, $B = (\varphi(b), \psi(b))$ und $L = \{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in [a, b]\}$.



Sind die Funktionen $\varphi, \psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so berechnet sich die Länge $\ell(L)$ der Kurve L nach der Formel (vgl. Abschnitt 0.11.2)

$$\ell(L) = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt\,. \tag{0.35}$$

In dem Fall, dass die Kurve L als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist, d.h. $L = \{(x, f(x)) : x \in [a,b]\}$, folgt

$$\ell(L) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx\,. \tag{0.36}$$

Die Koordinaten x_L und y_L des Schwerpunktes der Kurve L lassen sich nach den Formeln

$$x_L = \frac{1}{\ell(L)} \int_a^b \varphi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt\,, \quad y_L = \frac{1}{\ell(L)} \int_a^b \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt \tag{0.37}$$

berechnen.

Beispiel 0.87

1. *Viertelkreisbogen vom Radius r :* $\quad x = \varphi(t) = r\,\cos t\,,\ y = \psi(t) = r\,\sin t\,,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

   Es folgt unter Verwendung der Formel (0.35), dass $\ell = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\, dt = \frac{\pi\, r}{2}\,.$

2. *Die Parabel* $y = a\,x^2\,,\ 0 \le x \le x_0$: *Unter Verwendung von*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + c$$

   und Formel (0.36) ergibt sich

$$\ell = \frac{1}{4a}\left[2ax_0\sqrt{1+4a^2x_0^2} + \ln\left(2ax_0 + \sqrt{1+4a^2x_0^2}\right)\right]\,.$$

3. *Mechanische Arbeit entlang eines Weges: Ein Punkt P bewege sich im Zeitintervall $[0,T]$ entlang der Kurve $L = \{(\varphi(t), \psi(t)) : 0 \le t \le T\}$. Mit $s(t)$ bezeichnen wir den Weg (die Bogenlänge), den (die) der Punkt im Zeitintervall $[0,t]$ zurückgelegt hat, d.h.*

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{[\varphi'(\tau)]^2 + [\psi'(\tau)]^2}\, d\tau\,.$$

   $S = \ell(L) = s(T)$ sei die Länge der Kurve. Die Lage des Punktes P kennzeichnen wir durch die Abhängigkeit von der Bogenlänge, d.h. $P = P(s)$. In jedem Punkt der Kurve greife eine Karft $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(s)$ an. Mit $\cos(\overrightarrow{F}, s)$ bezeichnen wir den Kosinus des Winkels zwischen der Richtung der Tangente an die Kurve L im Punkt $P(s)$ und der Richtung der

in diesem Punkt angreifenden Kraft $\overrightarrow{F}(s)$ *. Die von* $P(s)$ *bis* $P(s+\Delta s)$ *geleistete Arbeit* $W(s+\Delta s) - W(s)$ *ist für kleine* Δs *ungefähr* $\left|\overrightarrow{F}(s)\right| \cos(\overrightarrow{F}, s)\,\Delta s$ *. Es folgt für* $\Delta s \longrightarrow 0$

$$W'(s) = \left|\overrightarrow{F}(s)\right| \cos(\overrightarrow{F}, s)\,,$$

also für die Gesamtarbeit

$$W(S) - W(0) = \int_0^S \left|\overrightarrow{F}(s)\right| \cos(\overrightarrow{F}, s)\, ds = \int_0^S F_s\, ds$$

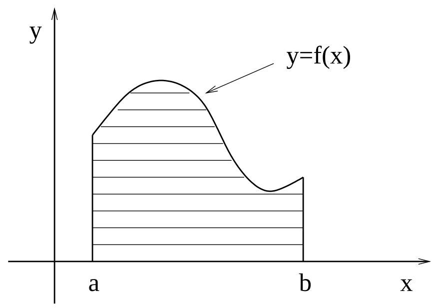
mit der Kraft F_s *, die gleich der Komponente der Kraft* $\overrightarrow{F}(s)$ *in Richtung der Tangente an* L *im Punkt* $P(s)$ *ist. Der sich bewegende Punkt habe die Masse* m *. Im Punkt* $P(s)$ *gilt dann* $F_s = m\,\dfrac{dv}{dt} = m\,\dfrac{dv}{ds}\,\dfrac{ds}{dt}$ *mit* $v = \dfrac{ds}{dt}$ *, also*

$$\text{Arbeit} = m \int_0^S v\,\frac{dv}{ds}\, ds = \left[\frac{1}{2}\, m\, v^2\right]_0^S = \text{Zuwachs an kinetischer Energie}\,.$$

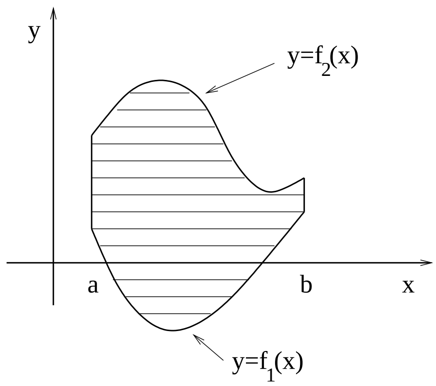
0.13.2 Berechnung von Flächeninhalten

Wir betrachten zwei Situationen:

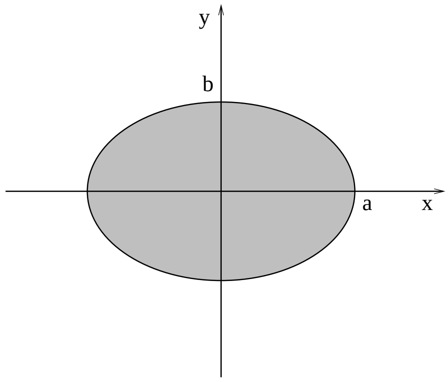
1. $F = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ (vgl. Abschnitt 0.11.1)



2. $F = \displaystyle\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx$



Beispiel 0.88 *Flächeninhalt der Ellipse mit den Halbachsen a und b :*



Die Ellipse genügt der Gleichung

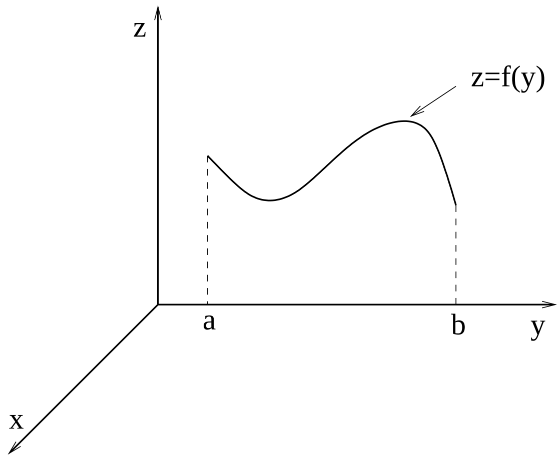
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

so dass mittels $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \le x \le a$, *sich der Flächeninhalt ergibt zu*

$$F = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 4\,a\,b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 z\,dz = \pi\,a\,b\,.$$

0.13.3 Volumina und Mantelflächen von Rotationskörpern

Wir lassen eine Kurve L, die durch den den Graphen einer Funktion $z = f(y)$, $a \le y \le b$, gegeben ist, um die y-Achse rotieren:



Für die Mantelfläche F und das Volumen V des so entstandenen Rotationskörpers ergeben sich die Formeln

$$F = 2\,\pi\int_a^b f(y)\sqrt{1 + [f'(y)]^2}\,dy \quad \text{und} \quad V = \pi\int_a^b [f(y)]^2\,dy\,. \tag{0.38}$$

Nach Formel (0.37) ist die z-Koordinate z_L des Schwerpunktes der Kurve L gleich

$$z_L = \frac{1}{\ell(L)} \int_a^b f(y)\sqrt{1+[f'(y)]^2}\,dy\,,$$

woraus

$$F = 2\,\pi\, z_L \ell(L)$$

und somit eine der Guldinschen Regeln folgt:

Guldinsche Regel. Der Inhalt der Mantelfläche des Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus der Länge der rotierenden Kurve und dem Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt der Kurve bei der Rotation beschreibt.

0.13.4 Logistisches Wachstum

Im Abschnitt 0.5 (Punkt 3.) wurde die Gleichung

$$P'(t) = k\,P(t)[P_{\text{opt}} - P(t)] \tag{0.39}$$

erwähnt, die ein Modell für ein durch gewisse Resourcen begrenztes Wachstum der Größe P in Abhängigkeit von der Zeit t darstellt. Man kann sich darunter auch einen Sättigungsprozess vorstellen, wobei P_{opt} die Sättigungsgröße darstellt. Wir nehmen an, dass $p_0 := P(0) \in (0, P_{\text{opt}})$ bekannt ist, und versuchen die Funktion $P(t)$ zu finden, die der Gleichung (0.39) genügt. Dazu schreiben wir diese Gleichung in der Form

$$\frac{P'(t)}{P(t)[P_{\text{opt}} - P(t)]} = k$$

und integrieren von $t = 0$ bis zu einem Zeitpunkt $t = T$. Wir erhalten

$$\int_0^T \frac{P'(t)\,dt}{P(t)[P_{\text{opt}} - P(t)]} = kT$$

bzw. nach der Substitution $p = P(t)$

$$\int_{p_0}^{P(T)} \frac{dp}{p\,(P_{\text{opt}} - p)} = kT\,.$$

Ist nun $F(p)$ eine Stammfunktion des Integranden, d.h.

$$F'(p) = \frac{1}{p\,(P_{\text{opt}} - p)}\,,$$

so folgt

$$F(P(T)) - F(p_0) = kT\,. \tag{0.40}$$

Offenbar ist

$$F(p) = \frac{1}{P_{\text{opt}}} \ln \frac{p}{P_{\text{opt}} - p}\,, \quad 0 < p < P_{\text{opt}}\,,$$

eine solche Stammfunktion, und wir erhalten aus (0.40)

$$\frac{P(T)}{P_{\text{opt}} - P(T)} = \frac{p_0}{P_{\text{opt}} - p_0}\, e^{k\, P_{\text{opt}} T}\,,$$

woraus sich

$$P(T) = \frac{\dfrac{p_0 P_{\text{opt}}}{P_{\text{opt}} - p_0}\, e^{k\, P_{\text{opt}} T}}{1 + \dfrac{p_0}{P_{\text{opt}} - p_0}\, e^{k\, P_{\text{opt}} T}}$$

bzw.

$$P(T) = \frac{P_{\text{opt}}}{1 + \dfrac{P_{\text{opt}} - p_0}{p_0}\, e^{-k\, P_{\text{opt}} T}}$$

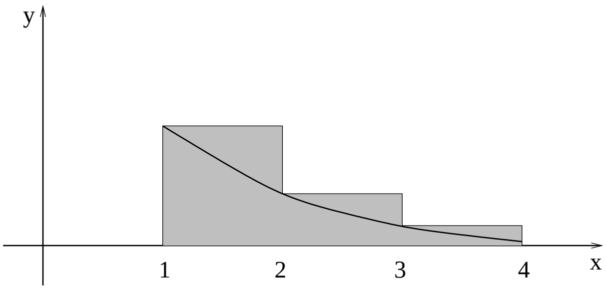
ergibt.

0.14 Uneigentliche Integrale

Wir fragen, ob der „Inhalt“ der Fläche unter dem Graphen der Funktion $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{-2}$ eine endliche Größe ist. Diese müsste auf jeden Fall kleiner als (siehe Abb.)

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

sein. Da die Zahlenreihe auf der rechten Seite bekanntlich konvergiert, d.h. eine endliche Summe besitzt, ist dieser „Flächeninhalt“ also auch endlich. Ein völlig analoger Sachverhalt liegt vor, wenn man z.B. die Funktion $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ auf dem Intervall $(0, 1]$ betrachtet.



0.14.1 Uneigentliche Integrale mit unendlichen Grenzen

Definition 0.89 *Es seien $a \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{R}[a, A] \quad \forall A > a$. Dann definieren wir*

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx := \lim_{A \to \infty} \int_a^A f(x)\, dx\,,$$

falls dieser Grenzwert existiert. Ist dieser unendlich oder existiert er überhaupt nicht, so nennt man das Integral $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ **divergent**, *sonst heißt es* **konvergent**. *Analog definiert man*

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx\,.$$

Ferner definiert man unter Verwendung eines beliebigen $a \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx\,.$$

Bemerkung 0.90 *Ist* $F(x)$ *eine Stammfunktion zu* $f(x)$ *auf* $[a,\infty)$, *so gilt*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} F(A) - F(a)\,.$$

Beispiel 0.91

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to\infty}\int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to\infty} \arctan A = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi$

2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{dx}{x^\alpha}$

$$= \lim_{A\to\infty}\left\{\begin{array}{lc} \dfrac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \dfrac{1}{1-\alpha} & ,\quad \alpha \neq 1\,, \\[2ex] \qquad \ln A & ,\quad \alpha = 1\,, \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} \infty & ,\quad \alpha \le 1\,, \\ \dfrac{1}{\alpha-1} & ,\quad \alpha > 1 \end{array}\right.$$

3. *Das Integral* $\displaystyle\int_0^\infty \sin x\,dx = \lim_{A\to\infty}\int_0^A \sin x\,dx = \lim_{A\to\infty}(1-\cos A)$ *divergiert.*

4. $\displaystyle\int_{2/\pi}^\infty \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx = \lim_{A\to\infty}\left[1-\sin\frac{1}{x}\right]_{2/\pi}^A = 1$

0.14.2 Uneigentliche Integrale über unbeschränkte Funktionen

Die Anwendung der folgenden Definition eines uneigentlichen Integrals macht sich z.B. dann erforderlich, wenn die Funktion $f(x)$ im Punkt a eine Polstelle hat.

Definition 0.92 *Es seien* $-\infty < a < b < \infty$ *und* $f \in \mathcal{R}[a+\eta, b]\ \ \forall \eta \in (0, b-a)$. *Existiert der Grenzwert*

$$\lim_{\eta\to+0}\int_{a+\eta}^b f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

so nennt man diesen uneigentliches Integral der Funktion $f(x)$ *über dem Intervall* $[a,b]$. *Ist dieser Grenzwert endlich, so heißt das Integral* **konvergent**, *sonst* **divergent**.

Bemerkung 0.93 *Auch andere Situationen sind denkbar. Ist z.B.* $c \in (a,b)$ *eine Polstelle der Funktion* $f(x)$ *, so definiert man*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to+0}\int_{c+\delta}^b f(x)\,dx\,.$$

Beispiel 0.94

1. $$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\eta\to+0}\int_\eta^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

$$= \lim_{\eta\to+0}\begin{Bmatrix} \dfrac{1}{1-\alpha}-\dfrac{\eta^\alpha}{1-\alpha} & , & \alpha\neq 1\,, \\ -\ln\eta & , & \alpha=1\,, \end{Bmatrix} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & , \quad \alpha<1\,, \\ \infty & , \quad \alpha\geq 1 \end{cases}$$

2. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\delta\to+0}\int_0^{1-\delta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\delta\to+0}\arcsin(1-\delta) = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$$

3. *Wir berechnen die Mantelfläche* F *und das Volumen* V *des Rotationskörpers, der bei Rotation des Graphen der Funktion* $f:(0,1]\longrightarrow\mathbb{R}\,,\ x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ *um die* x*-Achse entsteht. Unter Verwendung von (0.38) erhalten wir*

$$F = 2\pi\int_0^1 f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}}\sqrt{1+\frac{1}{9x^{8/3}}}\,dx \geq \frac{2\pi}{3}\int_0^1\frac{dx}{x^{5/3}} = \infty$$

und

$$V = \pi\int_0^1 [f(x)]^2\,dx = \pi\int_0^1\frac{dx}{x^{2/3}} = 3\pi\,.$$

0.15 Fehlerquellen bei der Integration

Sind $\varphi:[c,d]\longrightarrow[a,b]$ eine streng monotone und differenzierbare Funktion, $\psi:[a,b]\longrightarrow[c,d]$ die entsprechende Umkehrfunktion und $F:[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, so folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter Anwendung der Substitutionsregel

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(\psi(x))]_a^b = F(\psi(b))-F(\psi(a)) = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,.$$

Für die Gültigkeit dieser Formel ist die strenge Monotonie der Funktion $\varphi(t)$ eine wesentliche Voraussetzung. Ihre formale Anwendung kann zu falschen Resultaten führen, z.B. ist offenbar

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{2}\,,$$

aber

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x\,dx = \left| \begin{array}{ccc} t & = & \sin x \\ dt & = & \cos x\,dx \\ & = & \sqrt{1-t^2}\,dx \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \Big[-\sqrt{1-t^2}\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}\,.$$

Ferner kann eine formale Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung bei Nichtbeachtung von singulären Stellen (z.B. Polstellen) des Integranden zu Fehlern führen. So liefert zwar

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \Big[2\sqrt{|x|}\,\operatorname{sgn} x\Big]_{-1}^{1} = 2-(-2) = 4$$

ein richtiges Ergebnis, aber

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_{-1}^{1} = -2$$

offenbar ein falsches.

0.16 Übungsaufgaben

1. Berechnen Sie die nachstehenden uneigentlichen Integrale bzw. zeigen Sie ihre Divergenz:
   (a) $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^\lambda} \quad (\lambda \in \mathbb{R},\ a > 0)$,
   (b) **(HA)** $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{x^\mu} \quad (\mu, b > 0)$,
   (c) **(HA)** $\displaystyle\int_a^\infty \sin x\,dx$,
   (d) **(HA)** $\displaystyle\int_0^\infty e^{-kx}\,dx \quad (k > 0)$,
   (e) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln x}$,
   (f) v.p. $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \frac{dx}{x\ln x}$,
   (g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$,
   (h) v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x}$.

2. Untersuchen Sie die Konvergenz von
   (a) **(HA)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$, (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$, (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x}\,dx$, (d) $\displaystyle\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

3. Berechnen Sie die Länge ($a > 0$ fest gewählt)
   (a) der Astroide ($x = a\cos^3 t\,,\ y = a\sin^3 t\,,\ 0 \le t \le 2\pi$),
   (b) eines Bogens der Zykloide ($x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$),
   (c) **(HA)** der Kardioide ($r = a(1+\cos\varphi)\,,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$).

4. Berechnen Sie folgende Kurvenintegrale
   (a) $\int\limits_\Gamma (x^2+y^2)\,ds$, $\quad\Gamma$: Strecke von (a,a) bis (b,b) ,
   (b) $\int\limits_\Gamma y\,ds$, $\quad\Gamma$: Parabelbogen $y^2 = 2px$ von $(0,0)$ bis $(1,\sqrt{2p})$,

(c) **(HA)** $\int\limits_{\Gamma} xy\,ds, \quad \Gamma = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x \geq 0, y \geq 0\right\}$,

(d) **(HA)** $\int\limits_{\Gamma} \sin(2x)\,ds, \quad \Gamma$: Cosinuskurve von $x = 0$ bis $x = t$.

5. Ermitteln Sie das Volumen des Rotationsellipsoids, das bei Drehung der Ellipse

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$$

um die x-Achse entsteht.

6. Es sei $-r \leq x_1 < x_2 \leq r$. Das zwischen $x = x_1$ und $x = x_2$ liegende Stück des Halbkreises $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ werde um die x-Achse gedreht. Man gebe die Mantelfläche des Rotationskörpers an.

7. Ein Malermeister beauftragt seinen Lehrling, den unendlichen Trichter, der bei Rotation von

$$z = \frac{1}{y} \qquad (1 \leq y < \infty)$$

um die y-Achse entsteht, rot einzufärben! Der intelligente Lehrling überlegt zuerst, ob er den Zylinder anstreicht oder mit Farbe füllt! Wie entscheidet er sich und warum?

8. Berechnen Sie die Länge der Kurve

$$x = e^{-t}\cos t\,,\ y = e^{-t}\sin t\,,\ z = e^{-t} \quad (0 \leq t \leq \infty)\,.$$

9. **(HA)** Man ermittle den Schwerpunkt des Kreisbogenstücks aus Aufgabe 6 für den Fall $x_1 = -x_2$.

10. Berechnen Sie den Schwerpunkt des Flächenstücks, das von den Kurven (bzw. Geraden) $y = 0, x = 1$ und $y = \sqrt{2x}$ begrenzt wird.

0.17 Reihen und Integrale. Die Gammafunktion

Satz 0.95 (Integralkriterium für Reihen) *Sei $m \in \mathbb{N}$. Ist die Funktion*

$$f : [m,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$$

monoton fallend, so sind

$$\sum_{n=m}^{\infty} f(n) \quad \textit{und} \quad \int_m^{\infty} f(x)\,dx$$

gleichzeitig konvergent bzw. divergent. Im Falle der Konvergenz gilt

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} f(n) \leq \int_m^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=m}^{\infty} f(n)\,. \tag{0.41}$$

Beispiel 0.96

1. *Mit* $f(x) = x^{-\alpha}$ *folgt aus Satz 0.95 und Bsp. 0.91,2. die Konvergenz der Reihe*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$
für $\alpha > 1$ *und ihre Divergenz für* $0 < \alpha \le 1$. *Aus* (0.41) *folgt für* $\alpha > 1$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \le \frac{1}{\alpha - 1} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$
und somit
$$\frac{1}{\alpha - 1} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \le \frac{\alpha}{\alpha - 1}\,.$$

2. *Mittels der Subsitution* $x = \ln t$ *erhalten wir für* $\alpha > 1$
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \int_e^\infty \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha}\,,$$
woraus unter Verwendung von Satz 0.95 die Konvergenz der Reihe
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$$
folgt.

Satz 0.97 *Sei* $m \in \mathbb{N}$. *Ist die Funktion* $f : [m, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ *monoton fallend, so konvergiert die Zahlenfolge* $(c_n)_{n=m}^\infty$ *mit*
$$c_n = \sum_{k=m}^{n} f(k) - \int_m^n f(x)\,dx\,,$$
wobei außerdem
$$0 \le \lim_{n\to\infty} c_n \le f(m)$$
gilt.

Beispiel 0.98 *Für* $f(x) = \frac{1}{x}$ *und* $m = 1$ *erhalten wir aus Satz 0.97 die Konvergenz der Reihe* $(c_n)_{n=1}^\infty$ *mit*
$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\,.$$
Dabei gilt
$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0.5772156649015329\ldots \quad \text{(Eulersche Konstante).}$$

Beispiel 0.99 *Es sei*

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t} & , \quad 0 < t \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad t = 0\,. \end{cases}$$

Es gilt

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{\sin t - t}{t^2 \sin t} = \frac{-\dfrac{t^3}{3!} + \sin\xi\,\dfrac{t^4}{4!}}{t^2 \sin t} \overset{t\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{3!}\,,$$

also $f'(0) = -\frac{1}{6}$. *Für beliebiges* $n \in \mathbb{N}$ *erhält man mittels partieller Integration*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(n\,t)\,dt = -\frac{1}{n}\Big[f(t)\cos(n\,t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t)\cos(n\,t)\,dt \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

also

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(n\,t)}{t}\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(n\,t)}{\sin t}\,dt\right) = 0\,.$$

Unter Verwendung der Substitution $x = n\,t$ *folgt*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(n\,t)}{t}\,dt = \int_0^{n\cdot\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx\,,$$

d.h.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(n\,t)}{\sin t}\,dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx\,.$$

Aus

$$\begin{aligned} \sin[(2n+1)t] &= \sin[(2n-1)t] + 2\sin(t)\,\cos(2n\,t) \\ &= \sin[(2n-3)t] + 2\sin(t)\Big[\cos[2(n-1)t] + \cos(2n\,t)\Big] \\ &= \ldots \\ &= \left[1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\,t)\right]\sin t \end{aligned}$$

folgt nun

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t}\,dt = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2k\,t)\,dt = \frac{\pi}{2}$$

und somit

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Die Gammafunktion $\Gamma(x)$ ist wie folgt definiert. Für $x > 0$ setzt man

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, dt = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} \, dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} \, dt \, .$$

Wegen

$$0 \leq e^{-t} t^{x-1} \leq t^{x-1} \, , \quad t, x > 0 \, ,$$

konvergiert das Integral $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} \, dt$ für jedes $x > 0$. Da $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} e^{-t} t^m = 0$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt, konvergiert das Integral $\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} \, dt$ sogar für jedes $x \in \mathbb{R}$. Für $x > 0$ ist

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x \, dt = \Big[-e^{-t} t^x \Big]_0^\infty + x \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, dt = x\Gamma(x) \, . \tag{0.42}$$

Ferner gilt

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} \, dt = 1 \, .$$

Es folgt

$$\Gamma(n+1) = n! \, , \quad n \in \mathbb{N} \, .$$

Aus (0.42) folgt für $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1) \cdots (x+2)(x+1)x\Gamma(x) \, .$$

Diese Beziehung kann man zur Definition von $\Gamma(x)$ für negative, nicht ganzzahlige x benutzen: Für $-n < x < -n+1$ definiert man

$$\Gamma(x) := \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1) \cdots (x+n-1)} \, .$$

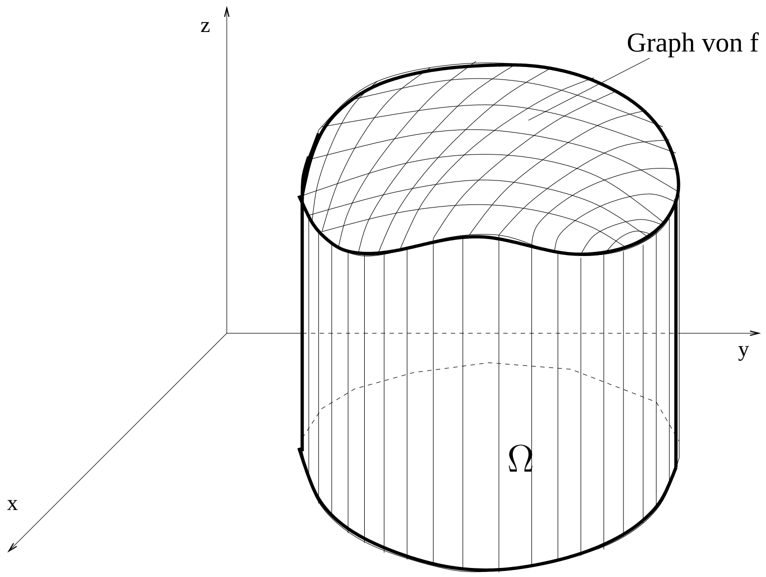
0.18 Mehrdimensionale Integralrechnung

0.18.1 Das Flächenintegral

Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein durch eine geschlossene Kurve $\partial\Omega$ berandetes Gebiet der x-y-Ebene und $f : \overline{\Omega} \longrightarrow [0, \infty)$ mit $\overline{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$ eine stetige Funktion. Wir stellen uns die Aufgabe, das Volumen V des zylindrischen Körpers

$$\big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \overline{\Omega} \, , \; 0 \leq z \leq f(x, y) \big\}$$

zu berechnen.



Volumen eines zylindrischen Körpers

Wir betrachten vorerst den Spezialfall, dass $\Omega = R = (a,b) \times (c,d)$ ein Rechteck ist. Mit $Q(y)$, $c \le y \le d$, bezeichnen wir den Inhalt der Fläche

$$\{(x,y,z) : a \le x \le b\,,\ 0 \le z \le f(x,y)\}\ .$$

Offenbar gilt

$$Q(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \quad \text{und} \quad V = \int_c^d Q(y)\,dy\,,$$

also

$$V = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy\,, \quad \text{analog} \quad V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx\,. \tag{0.43}$$

Wir könnten auch Zerlegungen $Z_x = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathbb{Z}[a,b]$ und $Z_y = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\} \in \mathbb{Z}[c,d]$ der Intervalle $[a,b]$ und $[c,d]$ betrachten, gewisse Punkte (ξ_{jk}, η_{jk}) aus den Teilrechtecken $[x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$ auswählen und die Summe

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f(\xi_{jk}, \eta_{jk})(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}) \tag{0.44}$$

als Näherungswert für das Volumen V ansehen. Fassen wir diese Summe als eine Integralsumme auf, so würden wir das eigentliche Volumen in der Form

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy \tag{0.45}$$

schreiben. Dieses Integral nennt man ein **Flächenintegral** und schreibt es auch in der Form

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dR\,. \tag{0.46}$$

Die sogenannten **iterierten Integrale** in (0.43) liefern eine Methode zur Berechnung des Flächenintegrals aus (0.45). Für diese Integrale schreibt man auch

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy\,.$$

Wir geben nun eine exakte Definition des Flächenintegrals. Mit

$$d(Z) = \max\left\{\max\{x_j - x_{j-1}, y_k - y_{k-1}\} : j = 1,\ldots,n\,,\ k = 1,\ldots,m\right\}$$

bezeichnen wir den Durchmesser der Zerlegung $Z = Z_x \times Z_y$ des Rechteckes R.

Definition 0.100 *Es sei $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Die Zahl $I \in \mathbb{R}$ nennen wir Flächenintegral der Funktion $f(x,y)$ über dem Rechteck $\mathbb{R}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass der Betrag der Differenz zwischen der Zahl I und der Summe* (0.44) *kleiner als ε ist für jede Zerlegung Z des Rechtecks R mit $d(Z) < \delta$ und beliebige Wahl der Punkte $(\xi_{jk}, \eta_{jk}) \in [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$. Existiert eine solche Zahl I, so nennt man die Funktion $f(x,y)$ auf R* **integrierbar** *und schreibt für I einen der Ausdrücke* (0.45) *oder* (0.46)*.*

Ist nun $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte Menge, d.h. es existiert ein Rechteck $R \subset \mathbb{R}^2$ mit $\Omega \subset R$, und ist $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene beschränkte Funktion, so definiert man

$$\iint\limits_\Omega f(x,y)\,dx\,dy := \iint\limits_R f^*(x,y)\,dx\,dy\,,$$

falls das Integral auf der rechten Seite existiert, wobei

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & : \quad (x,y) \in \Omega \\ 0 & : \quad (x,y) \in R \setminus \Omega\,. \end{cases} \tag{0.47}$$

Satz 0.101 (Fubini) *Es sei $f(x,y)$ auf dem Rechteck $R = [a,b] \times [c,d]$ integrierbar. Existieren die Integrale*

$$F(x) := \int_c^d f(x,y)\,dy \quad \forall\, x \in [a,b]$$

und

$$G(y) := \int_a^b f(x,y)\,dy \quad \forall\, y \in [c,d]\,,$$

so gilt

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx\,. \tag{0.48}$$

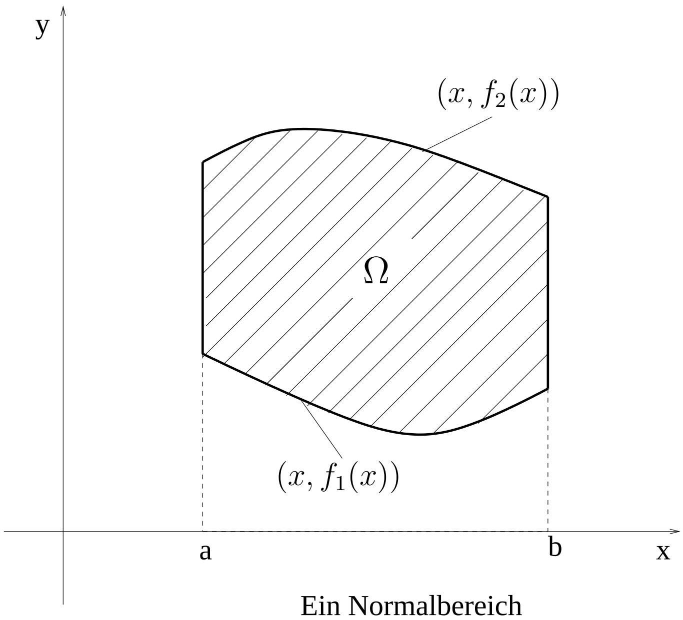
Beispiel 0.102 *Wir berechnen das Flächenintegral für* $R = [3,4]\times[1,2]$ *und* $f(x,y) = (x+y)^{-2}$.
Ergebnis: $\ln \dfrac{25}{24}$

Wir wenden nun den Satz 0.101 auf den Fall an, dass Ω ein sog. **Normalbereich** ist, d.h. z.B.

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b\,,\ f_1(x) < y < f_2(x)\right\}\,,$$

wobei $f_1, f_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen sind, für die $f_1(x) \le f_2(x)$, $x \in [a,b]$, gilt. Ist $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist $f^* : R \longrightarrow \mathbb{R}$ (vgl. (0.47)) mit $\Omega \subset R = [a,b] \times [c,d]$ auf R integrierbar. Aus (0.48) folgt

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,d\Omega = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy\,.$$



Ein Normalbereich

Beispiel 0.103 *Es seien* $f(x,y) = x^2 + y$ *und*

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\,,\ x^2 < y < \sqrt{x}\right\}\,.$$

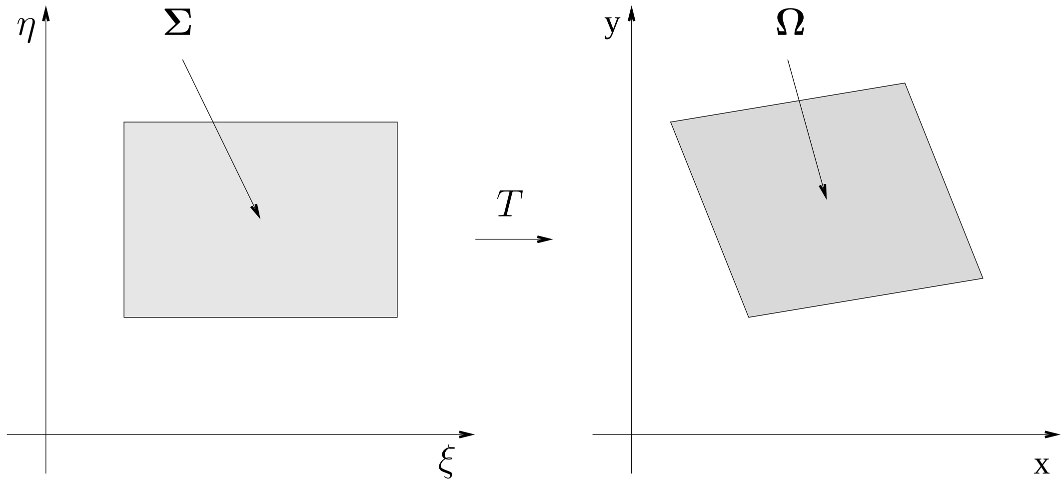
Wir berechnen

$$\iint\limits_{\Omega} (x^2+y)\,d\Omega = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y)\,dy\,.$$

Ergebnis: $\dfrac{33}{140}$

0.18.2 Variablentransformation in Flächenintegralen

Die beiden Funktionen $x(\xi,\eta)$ und $y(\xi,\eta)$, $(\xi,\eta)\in\Sigma$, mögen eine eineindeutige, stetig differenzierbare Abbildung zwischen den Gebieten $\Sigma\subset\mathbb{R}^2$ und $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ beschreiben.



$$\text{Zur Transformation } T\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x(\xi,\eta)\\ y(\xi,\eta)\end{bmatrix}$$

Mit $\mathcal{J}(\xi,\eta)$ bezeichnen wir die sog. **Funktionaldeterminante** dieser Transformation

$$\mathcal{J}(\xi,\eta)=\det\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\xi} & \dfrac{\partial x}{\partial\eta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\xi} & \dfrac{\partial y}{\partial\eta}\end{bmatrix}=\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\,.$$

Dann gilt

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,d\Omega=\iint\limits_{\Sigma} f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))\,|\mathcal{J}(\xi,\eta)|\;d\Sigma\,.$$

Beispiel 0.104 *Wir berechnen den Flächeninhalt der Ellipse*

$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1\right\}$$

mit den Halbachsen a und b (vgl. auch Bsp. 0.88). Die Funktionen

$$x(r,\varphi)=a\,r\cos\varphi \quad \textit{und} \quad y(r,\varphi)=b\,r\sin\varphi\,,\quad (r,\varphi)\in R:=(0,1)\times(0,2\pi)\,,$$

beschreiben eine eineindeutige Transformation zwischen dem Rechteck R und der Ellipse Ω. Es gilt

$$\mathcal{J}(r,\varphi)=\det\begin{bmatrix}a\cos\varphi & -a\,r\sin\varphi\\ b\sin\varphi & b\,r cos\varphi\end{bmatrix}=a\,b\,r$$

und somit

$$\iint_\Omega d\Omega = \iint_R a\,b\,r\,dr\,d\varphi = a\,b\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\,dr = \pi\,a\,b\,.$$

Beispiel 0.105 *Wir berechnen den Inhalt der Fläche* Ω *, die von den Kurven* $y^2 = p\,x$ *,* $y^2 = q\,x$ $(0 < p < q)$ *und* $x^2 = a\,y$ *,* $x^2 = b\,y$ $(0 < a < b)$ *berandet wird. Die Gleichungen*

$$y^2 = \xi\,x \quad \text{und} \quad x^2 = \eta\,y$$

beschreiben eine eineindeutige Abbildung zwischen dem Rechteck $R = (p,q)\times(a,b)$ *und* Ω *. Dabei ist* $\mathcal{J}(\xi,\eta) = -\dfrac{1}{3}$ *und somit*

$$\iint_\Omega dx\,dy = \frac{1}{3}\int_p^q d\xi \int_a^b d\eta = \frac{(q-p)(b-a)}{3}\,.$$

Beispiel 0.106 *Wir berechnen*

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty} I_n\,, \quad I_n := \int_{-n}^{n} e^{-x^2}\,.$$

Mit D_r *,* $r > 0$ *, bezeichnen wir die Kreisscheibe* $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < r^2\right\}$ *und mit* Q_n *das Quadrat* $(-n,n)\times(-n,n)$ *. Es gilt*

$$I_n^2 = \int_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_{-n}^{n} e^{-y^2}\,dy = \iint_{Q_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\,,$$

also

$$\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \le I_n^2 \le \iint_{D_{n\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\,. \tag{0.49}$$

Aus

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r\,dr = \pi\left(1 - e^{-R^2}\right)$$

und den Ungleichungen (0.49) *folgt*

$$\pi\left(1 - e^{-n^2}\right) \le I_n^2 \le \pi\left(1 - e^{-2n^2}\right)\,,$$

also

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n = \sqrt{\pi}\,.$$

0.18.3 Kurvenintegrale. Der Gaußsche Integralsatz

Im Abschnitt 0.13.1 haben wir die Länge einer Kurve $L = \{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in [a, b]\}$ berechnet. Dabei erhielten wir für die Bogenlänge s die Formel

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{[\varphi'(\tau)]^2 + [\psi'(\tau)]^2}\, d\tau\,.$$

Es sei nun auf L eine Funktion $f : L \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (x, y) \mapsto f(x, y)$ gegeben. Ausgehend von einer Zerlegung $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \in \mathcal{Z}[a, b]$ des Parameterintervalls $[a, b]$ und der Wahl gewisser Punkte $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ definieren wir zwei verschiedene Integralsummen

$$\sum_{k=1}^{n} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \tag{0.50}$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))\Delta x_k\,. \tag{0.51}$$

Existieren bei Verfeinerung der Zerlegungen unabhängig von der Wahl der Punkte τ_k die Grenzwerte dieser Integralsummen, so nennen wir im Fall (0.50) diesen Grenzwert **Kurvenintegral 1. Art** und bezeichnen ihn mit

$$\int_L f\, ds\,,$$

im Fall (0.51) heißt der Grenzwert **Kurvenintegral 2. Art** und wird mit

$$\int_L f\, dx$$

bezeichnet. Analog definiert man das Kurvenintegral 2. Art

$$\int_L f\, dy\,.$$

Sind die Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ differenzierbar, so kann man diese Kurvenintegrale mit Hilfe von Riemann-Integralen berechnen:

$$\begin{aligned}
\int_L f\, ds &= \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt\,,\\
\int_L f\, dx &= \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)\, dt\,,\\
\int_L f\, dy &= \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\, dt\,.
\end{aligned}$$

Beispiel 0.107 *Im Beispiel 0.87,3. erhielten wir für die Arbeit, die eine Kraft $\overrightarrow{F}$ bei der Bewegung eines Punktes entlang einer Kurve L verrichtet die Formel*

$$W = \int_0^S F_s\,ds = \int_L F_s\,ds \quad \text{(Kurvenintegral 1.Art)}\,.$$

Schreiben wir $\overrightarrow{F}$ in der Form

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{bmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{bmatrix}, \quad (x,y) \in L\,,$$

so gilt

$$F_s(x,y) = F_1(x,y)\cos\alpha + F_2(x,y)\sin\alpha$$

wobei $\alpha = \alpha(x,y)$ gleich dem Winkel zwischen der Richtung der Tangente an L im Punkt (x,y) und der x-Achse bezeichnet. Wir erhalten andererseits

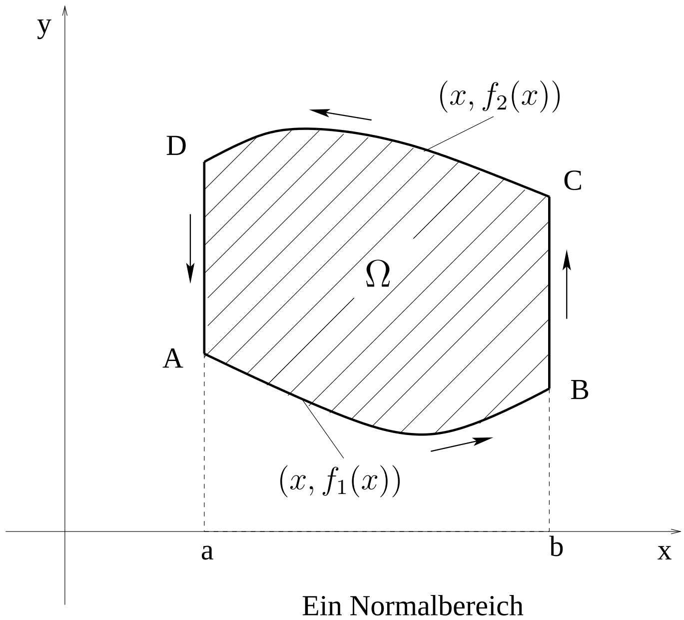
$$\begin{aligned} W(x+\Delta x, y+\Delta y) - W(x,y) &\approx \left|\overrightarrow{F}(x,y)\right| \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\, \cos\left(\overrightarrow{F}(x,y), \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}\right) \\ &= F_1(x,y)\Delta x + F_2(x,y)\Delta y\,, \end{aligned}$$

und es folgt

$$W = \int_L \left[F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy\right] = \int_L \left[F_1(x,y)\cos\alpha + F_2(x,y)\sin\alpha\right]\,ds\,. \tag{0.52}$$

Diese Formel zeigt also eine Umrechnungsmöglichkeit zwischen den Kurvenintegralen unterschiedlicher Art.

Es sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich, gegeben durch die zwei Funktionen $f_1, f_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f_1(x) \le f_2(x)$, $a \le x \le b$. Den Rand $\partial\Omega$ dieses Bereiches orientieren wir so, dass Ω selbst links davon liegt (siehe Abb.).



Ein Normalbereich

Ferner sei $P : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit stetiger partieller Ableitung $\dfrac{\partial P}{\partial y} : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$. Es gilt nun

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\, dx\, dy &= \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\, dy \\
&= \int_a^b \left[P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))\right]\, dx \\
&= -\int_{CD} P(x,y)\, dx - \int_{AB} P(x,y)\, dx \\
&= -\int_{\partial\Omega} P(x,y)\, dx\,.
\end{aligned}$$

Analog zeigt man

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} Q(x,y)\, dy$$

für eine stetige Funktion $Q : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit stetiger partieller Ableitung $\dfrac{\partial Q}{\partial x} : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$. Diese Überlegungen für den Fall eines Normalbereiches lassen sich nun wie folgt verallgemeinern. Den Rand $\partial\Omega = \{(\varphi(t), \psi(t)) : a \le t \le b\}$ eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nennt man **stückweise glatt**, falls die Funktionen $\varphi, \psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und stückweise stetig differenzierbar sind mit $[\varphi'(t \pm 0)]^2 + [\psi'(t \pm 0)]^2 > 0 \ \forall\, t \in [a,b]$. Eine Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **stückweise**

stetig, wenn eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{Z}[a,b]$ existiert, so dass die Funktionen $f_j : [x_{j-1}, x_j] \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, mit

$$f_j(x) = \begin{cases} f(x) & : \quad x_{j-1} < x < x_j\,, \\ \lim_{x\to x_{j-1}+0} f(x) & : \quad x = x_{j-1}\,, \\ \lim_{x\to x_j-0} f(x) & : \quad x = x_j\,, \end{cases}$$

stetig sind.

Satz 0.108 (Integralsatz von Gauß) *Der Rand $\partial\Omega$ von $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei stückweise glatt und so orientiert, so dass Ω links von $\partial\Omega$ liegt. Ferner seien $P, Q, \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x} : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann gilt*

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right] dx\,dy = \int_{\partial\Omega} [Q(x,y)\,dy + P(x,y)\,dx]\ .$$

Im weiteren werden wir unter einem Gebiet des $\mathbb{R}^n$ eine zusammenhängende offene Menge verstehen (vgl. die einleitenden Bemerkungen zum Abschnitt 0.9). Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nennt man zusammenhängend, wenn <u>keine</u> zwei nichtleeren offenen Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{und} \quad \Omega \subset A \cup B$$

existieren.

Es seien nun $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $P, Q : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Wir nennen das Integral

$$\int_\Gamma [P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy] \tag{0.53}$$

in Ω **vom Wege unabhängig**, wenn es für jede stückweise glatte Kurve $\Gamma \subset \Omega$ den gleichen Wert annimmt, wenn nur Anfangs- und Endpunkt der Kurve festgehalten werden. Das ist offenbar genau dann der Fall, wenn für jede geschlossene, stückweise glatte Kurve $\Gamma \subset \Omega$ der Wert des Integrals (0.53) gleich Null ist. Setzen wir voraus, dass die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ existieren und stetig sind, so ist das Integral (0.53) genau dann vom Weg unabhängig, wenn eine sog. **Potentialfunktion** $U : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert, d.h. es gilt

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q \quad \text{auf} \quad \Omega\,. \tag{0.54}$$

In diesem Fall nennt man das Vektorfeld $\overrightarrow{F} = (P,Q) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (P(x,y), Q(x,y))$ auch ein **Potentialfeld**. Existiert eine solche Potentialfunktion, so gilt nämlich mit

$$\Gamma = \{(\varphi(t), \psi(t)) : a \le t \le b\} \subset \Omega\,, A = (\varphi(a), \psi(b))\,,\ B = (\varphi(b), \psi(b))$$

die Beziehung

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma [P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy] &= \int_a^b [U_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + U_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]\,dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt} U(\varphi(t),\psi(t))\,dt \\
&= U(B) - U(A)\,,
\end{aligned}$$

so dass das Integral (0.53) vom Weg unabhängig ist. Ist umgekehrt das Integral (0.53) in Ω vom Weg unabhängig, so kann man leicht zeigen, dass die Funktion

$$U(x,y) = \int_{\Gamma(x,y)} [P(\xi,\eta)\,d\xi + Q(\xi,\eta)\,d\eta]\,, \quad (x,y) \in \Omega\,,$$

die Bedingungen (0.54) erfüllt, wobei $\Gamma(x,y) \subset \Omega$ eine beliebige stückweise glatte Kurve mit einem festgewählten Anfangspunkt $(x^*,y^*) \in \Omega$ und dem Endpunkt $(x,y) \in \Omega$ ist.

Beispiel 0.109 *Das Newtonsche Schwerkraftfeld für den Punkt* $(0,0)$ *mit der Masse* m

$$\overrightarrow{F}(x,y) = -\frac{m}{r^2} \begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} \\ \dfrac{y}{r} \end{bmatrix}, \quad (x,y) \neq (0,0)\,,\ r = \sqrt{x^2+y^2}\,,$$

ist ein Potentialfeld.

Ist $(P,Q) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ein Potentialfeld, so folgt aus (0.54) und dem Satz 0.54 die sog. **Integrabilitätsbedingung**

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \quad \forall\,(x,y) \in \Omega\,. \tag{0.55}$$

Ist diese erfüllt, so zeigt der Integralsatz von Gauß (Satz 0.108), dass das Integral (0.53) vom Weg unabhängig ist. Dabei ist zu beachten, dass dieser Satz voraussetzt, dass das Gebiet Ω von **einer** geschlossenen Kurve berandet wird. Man bezeichnet diese Eigenschaft des Gebietes als **einfachen Zusammenhang** im Gegensatz zu **mehrfach zusammenhängenden** Gebieten, die ein oder mehrere "Löcher" aufweisen können. Das folgende Beispiel zeigt, dass die Bedingung (0.55) nicht hinreichend für die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals (0.53) ist, wenn das Gebiet mehrfach zusammenhängend ist.

Beispiel 0.110 *Für die Funktionen*

$$P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad \textit{und} \quad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\,, \quad (x,y) \neq (0,0)\,,$$

gilt (0.55) *auf* $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. *Für den Einheitsreis* $\mathbb{T} = \{(\cos t, \sin t) : -\pi \le t \le \pi\}$ *erhalten wir aber*

$$\int_{\mathbb{T}} [P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy] = 2\,\pi\,.$$

0.18.4 Ergänzende Formeln

1. Koordinaten des Schwerpunktes einer mit Masse belegten Kurve $L \subset \mathbb{R}^2$:

$$x_L = \frac{1}{|L|} \int_L x\rho(x,y)\,ds\,, \quad y_L = \frac{1}{|L|} \int_L y\rho(x,y)\,ds\,,$$

$|L| = \displaystyle\int_L \rho(x,y)\,ds$ - Gesamtmasse der Kurve, $\rho(x,y)$ - Dichte der Massebelegung (vgl. (0.37))

2. Koordinaten des Schwerpunktes einer mit Masse belegten Fläche $F \subset \mathbb{R}^2$:

$$x_F = \frac{1}{|F|} \iint_F x\rho(x,y)\,dF\,, \quad y_L = \frac{1}{|F|} \iint_F y\rho(x,y)\,dF\,,$$

$|F| = \displaystyle\iint_L \rho(x,y)\,dF$ - Gesamtmasse der Fläche, $\rho(x,y)$ - Dichte der Massebelegung

0.19 Übungsaufgaben

1. Man berechne folgende Integrale:

   (a) $\displaystyle\iint_{R_1} x\,dR_1\,,\ \ R_1 = (0,3)\times(0,2)\,,$

   (b) $\displaystyle\iint_{R_2} \left(x^2+e^y\right)\,dR_2\,,\ \ R_2 = (-1,1)\times(0,2)\,,$

   (c) $\displaystyle\iint_{\Omega} x\,y\,d\Omega\,,\ \ \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<2,\ -x<y<1+x\right\}\,,$

   (d) $\displaystyle\iint_{\Sigma} \left(x^4y+3\right)\,d\Sigma\,,\ \ \Sigma = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1<x<1,\ x^2<y<1\right\}\,,$

   (e) $\displaystyle\iint_{B} \left(5-x^2-y^2\right)\,dB\,,\ \ B = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|<1\right\}\,.$

2. Man berechne den Flächeninhalt des Vierecks, welches von den Geraden $y = a_1x$, $y = a_2x$, $y = 1-b_1x$ und $y = 1-b_2x$ berandet wird, wobei $0 < a_1 < a_2$ und $0 < b_1 < b_2$ gelte.

3. Man berechne mittels eines Flächenintegrals das Volumen

   (a) des Körpers $K_1 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in(0,1)\times(0,2),\ 0<z<2-x\,y\right\}$,

   (b) des Kegels $K_2 = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2<z^2,\ 0<z<1\right\}$,

   (c) der Pyramide mit den Eckpunkten $(0,0,0)$, $(H,0,0)$, $(H,a,0)$, $(H,0,b)$ und (H,a,b) , wobei H , a und b positive Zahlen sind,

   (d) des Ellipsoiden $E = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}<1\right\}$ mit den Halbachsen $a>0$, $b>0$, $c>0$,

(e) der Kugelkappe $S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1,\ \frac{1}{2} < z < 1 \right\}$.

Falls möglich berechne man die Volumina auch über die Formel für das Volumen von Rotationskörpern (Abschnitt 0.13.3).

4. Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes

   (a) der Astroide mit dem Parameter $a > 0$ (vgl. Aufgabe 3a, Abschnitt 0.16),

   (b) des Bogens der Astroide aus Aufgabe 3a, Abschnitt 0.16, der im ersten Quadranten liegt,

   (c) des Bogens der Zykloide aus Aufgabe 3b, Abschnitt 0.16,

   (d) der Kardioide aus Aufgabe 3c, Abschnitt 0.16.

Index