Lineare Algebra/Analytische Geometrie für Physiker

7. Übung

1. Bestimmen Sie für folgende (reelle) symmetrische Matrizen A die Eigenwerte, deren Vielfachheit sowie ein dazugehöriges System von Eigenvektoren. Geben Sie eine orthogonale Matrix B an, so dass $B^T AB$ Diagonalgestalt hat.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (b) **(HA)** $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ (d) **(HA)** $\operatorname{diag}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$

(Z1) $A = J_n := \begin{bmatrix} \delta_{i,n-j+1} \end{bmatrix}_{i,j=1}^{n}$ (Flip-Matrix) **(Z2)** $A = \begin{bmatrix} \alpha_{ij} \end{bmatrix}_{i,j=1}^{n}$ mit $\alpha_{ij} = 1 \; \forall \, i,j$

2. **(HA)** Man beweise: Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn Null kein Eigenwert von A ist.

3. Sei λ Eigenwert einer regulären Matrix A. Zeigen Sie, dass dann $\frac{1}{\lambda}$ Eigenwert von A^{-1} ist.

4. Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte einer unitären Matrix auf dem Einheitskreis liegen.

5. **(HA)** Zeigen Sie, dass eine reelle, symmetrische und orthogonale Matrix nur die Eigenwerte $+1$ oder -1 hat. Gilt dies auch ohne die Voraussetzung "symmetrisch"?

6. Seien $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ die Eigenwerte einer diagonalisierbaren $n \times n$ Matrix A, und sei $g(\mu)$ ein Polynom. Zeigen Sie, dass dann $g(\lambda_1), \cdots, g(\lambda_n)$ die Eigenwerte von $g(A)$ sind.

7. Man transformiere (wenn möglich) die folgenden Matrizen auf Diagonalform und gebe die entsprechende Transformationsmatrix (wenn möglich, als unitäre Matrix) an.

(a) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2\,\mathbf{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2\,\mathbf{i} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) **(HA)** $A_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $A_4 = A_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. Man orthonormalisiere das System $\{g^1, g^2, g^3, g^4\}$ mit

(a) $g^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $g^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, $g^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $g^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$,

(b) **(HA)** $g^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $g^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $g^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, $g^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

9. **(HA)** Es seien zwei Basen

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

sowie ein Vektor $x = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 30 \end{bmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Man finde die Koordinaten von x in diesen beiden Basen.

10. **(HA)** Geben Sie alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, die die Eigenwerte $-1, 1$ und 0 besitzen.

(Z3) Geben Sie für die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ eine Zerlegung $A = QR$ an, wobei Q eine orthogonale Matrix ist und R eine obere Dreiecksmatrix. (Hinweis: Wenden Sie das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf die Spalten der Matrix A an!)

(Z4) Sei $\phi(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} - \cdots - a_1 x - a_0$ ein Polynom n-ten Grades. Die $n \times n$ Matrix

$$C_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \\ a_0 & \cdots & & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

heißt **Begleitmatrix** von $\phi(x)$.

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und alle Eigenwerte von C_ϕ.
2. Seien alle Eigenwerte λ_i, $i = 0, 1, \cdots, n-1$, von C_ϕ einfach. Zeigen Sie, dass dann C_ϕ die Diagonalisierung $V^{-1} C_\phi V = \operatorname{diag} \begin{bmatrix} \lambda_0 & \cdots & \lambda_{n-1} \end{bmatrix}$ mit $V = \begin{bmatrix} \lambda_j^i \end{bmatrix}_{i,j=0}^{n-1}$ gestattet.
3. Überprüfen Sie obige Aussagen für $\phi(x) = x^n - 1$. In diesem Falle ist $F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} V$ die Fouriermatrix der Ordnung n.

(Z5) Zeigen Sie, dass jede Matrix der Gestalt

$$C = \operatorname{circ} \begin{bmatrix} c_0 & \cdots & c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \ddots & c_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_1 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix}$$

(spezielle Toeplitzmatrix, genannt Zirkulante) mit Hilfe einer unitären Transformation auf Diagonalgestalt gebracht werden kann. Wie sieht diese Transformation und wie sehen die Diagonalelemente aus?