Lineare Algebra/Analytische Geometrie für Physiker

6. Übung, Teil 2

1. Lösen Sie folgende homogene Gleichungssysteme mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. Bestimmen Sie eine Basis von $\ker A$ und $\operatorname{im} A$, wenn A die Koeffizientenmatrix der Gleichungssysteme bezeichnet.

   (a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

   (b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

   (c) $$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

   (d) $$\begin{aligned} -2x + 4y + z &= 0 \\ 3x + y - z &= 0 \\ x + 2z &= 0 \end{aligned}$$

   (e) $$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - y + 2z &= 0 \\ 3x - y + 3z &= 0 \\ x + 3y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

   (f) **(HA)** $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

   (g) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

   (h) **(HA)** $$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ x + y - 5z &= 0 \\ x - 3z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

   (i) $$\begin{aligned} x - y + z - w &= 0 \\ x + y - u + v &= 0 \\ y + z + v - w &= 0 \end{aligned}$$

2. Lösen Sie folgende inhomogene Gleichungssysteme mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus:

   (a) $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 8 \\ 15x_1 + 10x_2 &= 40 \end{aligned}$$

   (b) $$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

   (c) **(HA)** $$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x - y + z &= 0 \\ 5x - y + 3z &= 1 \\ x - 2y &= -1 \end{aligned}$$

   (d) $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 6x_1 - 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

   (e) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_4 + 2x_6 &= 2 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 2 \\ x_4 - x_5 + x_6 &= 1 \end{aligned}$$

3. Man bestimme die Lösungen folgender Gleichungssysteme in Abhängigkeit von λ :

   (a) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & .\lambda & 1 \\ \lambda & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   (b) **(HA)** $$\begin{bmatrix} 2 & -9 & 7 \\ -1 & 2 & -2 \\ 6 & 13 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   (c) **(HA)** $$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x - y + 2z &= 2 \\ 3x - y + 3z &= \lambda \end{aligned}$$

   (d) $$\begin{aligned} x + y + \lambda z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 1 \\ \lambda x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

4. Man löse folgende Gleichungssysteme unter Verwendung der inversen Matrix:

   (a) **(HA)** $$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 1 \\ x + 2y + 3z &= 0 \\ 3x + 2y + 2z &= -2 \end{aligned}$$

   (b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= b_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

5. Gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{C}^n$ eines komplexen Gleichungssystems $Ax = b$. Wie kann man diese durch Übergang zu einem äquivalenten reellen Gleichungssystem finden?

6. (a) Berechnen Sie die inversen Matrizen A^{-1} **(HA)** und B^{-1} zu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

mit Hilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens und der Adjunkten.

(b) Bestimmen Sie die Lösungen x, y der Gleichungssysteme

$$(\textbf{HA})\ Ax = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 \end{bmatrix}^T \quad \text{und} \quad By = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

unter Verwendung der inversen Matrix und **(HA)** kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mit der Cramerschen Regel.

7. Sei $\mathbb{R}_n[x]$ der lineare Raum aller (reellen) Polynome maximal n-ten Grades.

(a) Gibt es ein Polynom $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$, welches an den Stellen $x_i = i \quad (i = 1, 2, 4)$ gerade die gleichen Funktionswerte annimmt wie $f(x) = x^{-1}$? Wenn ja, geben Sie die Koeffizienten dieses Polynoms an!

(b) Gibt es ein lineares Polynom, das die Bedingungen aus (a) erfüllt?

8. Berechnen Sie die dritte Komponente der Lösung des Gleichungssystems aus Aufgabe 4 (a) bzw. (b) mittels Cramerscher Regel!

9. **(HA)** Gegeben sei die tridiagonale Matrix A_n n-ter Ordnung ($n > 1$), deren Einträge auf der Hauptdiagonale gleich 2 und auf den Nebendiaglonalen gleich -1 sind, d.h.

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $\det A_5$ und A_5^{-1}.

(b) Zeigen Sie, dass A_n ($n > 1$) regulär ist und dass

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 1 & 2 & & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & & n-1 & n \end{bmatrix} - \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

gilt.

(**Z**) Berechnen Sie $\det A_n$.

(Z) Man finde alle Matrizen X, für die gilt

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

(c) $U_n X = X U_n$ mit $U_n = [\delta_{i,j+1}]_{i,j=1}^n$, wobei $\delta_{i,j}$ das Kronecker–Symbol bezeichnet.