Lineare Algebra/Analytische Geometrie für Physiker

6. Übung, Teil 1

1. Gesucht ist die Matrixdarstellung der Abbildung $A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3\,,\ \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \xi_1+\xi_4 \\ \xi_2+\xi_3 \\ \xi_1+\xi_3 \end{bmatrix}$ bezüglich der kanonischen Basen.

2. Man konstruiere eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die als Matrixdarstellung eine symmetrische Matrix besitzt.

3. Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

   (a) Man berechne $2B - A$.

   (b) **(HA)** Man löse die Gleichung $A + X = B$.

   (c) Wie gross ist der Rang von A, B und **(HA)** X?

   (d) Man verändere **einen** Eintrag in B so, dass mindestens ein singulärer Minor der Ordnung 2 entsteht. (Kann man durch Änderung eines Elementes den Rang von B verkleinern?)

   (e) **(HA)** Man berechne den Rang von BA^T und AB^T.

4. Bestimmen Sie die Determinante folgender Matrizen:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. **(HA)** Für welche $\varphi \in [0, 2\pi)$ verschwinden die Determinanten der Matrizen?

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & \varphi & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Man berechne die Determinante folgender Matrizen:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & 2 & a & \cdots & a \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & n \end{bmatrix},$$

(d) **(HA)** $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, (e) $\left.\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{bmatrix}\right\} n \text{ Zeilen}$,

(f) $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, **(Z1)** $\begin{bmatrix} \lambda_j^k \end{bmatrix}_{j,k=0}^{n-1}$.

7. Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen:

   (a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & -8 & -7 & 4 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, (c) **(HA)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & -5 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Eine Matrix, bei der in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine Eins und sonst Nullen stehen, heißt **Permutationsmatrix**. Welche Werte kann die Determinante einer Permutationsmatrix annehmen?

9. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix, d.h. $A^{-1} = A^T$. Man zeige, dass $|\det A| = 1$.

10. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ **schiefsymmetrisch**, d.h. $A^T = -A$. Man zeige, dass $\det A = 0$ gilt, falls n ungerade ist. (Gilt sogar, dass der Rang von A stets gerade ist?)

11. Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Man zeige, dass das Produkt AB der Matrizen A und B genau dann singulär ist, wenn eine der beiden Matrizen A oder B singulär ist.

12. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\omega_n = e^{\frac{2\pi \mathbf{i}}{n}} = \cos \frac{2\pi}{n} + \mathbf{i} \sin \frac{2\pi}{n}$. Wir betrachten die Matrix der **diskreten Fouriertransformation**
    $$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} \omega_n^{jk} \end{bmatrix}_{j,k=0}^{n-1}.$$
    (a) **(HA)** Zeigen Sie, dass F_n symmetrisch, sogar unitär ist.
    (b) Zeigen Sie, dass $F_n^4 = I_n$ ist.
    (c) Erläutern Sie am Beispiel der Fouriermatrix F_4 (oder F_8) das Teile- und Herrsche-Prinzip zur Berechnung von $F_n x$, $x \in \mathbb{C}^n$, welches zur sogenannten **schnellen Fouriertransformation (FFT)** führt.

(Z2) Es sei $A = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$ eine quadratische Matrix, wobei E, F, G, H selbst Matrizen (E, H - quadratisch) passender Ordnung sind mit $\det E \neq 0$. Zeigen Sie, dass A genau dann regulär ist, wenn die Matrix $A \backslash E := H - GE^{-1}F$ regulär ist, wobei $\det A = \det E \cdot \det A \backslash E$ gilt. ($A \backslash E$ wird **Schurkomplement** von E in A genannt.)