Lineare Algebra/Analytische Geometrie für Physiker

5. Übung

1. Es seien

   (a) $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ die Menge aller positiven reellen Zahlen,

   (b) $\mathbb{R}_n[t] := \{p(t) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j t^j : a_j \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller Polynome vom Grade $\leq n$, deren Koeffizienten reelle Zahlen sind.

   Sind diese Mengen mit den folgenden Operationen Vektorräume über $\mathbb{R}$:

   (a) $x + y := xy$ und $\lambda x := x^\lambda$,

   (b) $(p+q)(t) := -p(t) - q(t)$ und $(\lambda p)(t) := p(\lambda t)$.

2. Im Raum $C[0,1]$ der auf $[0,1]$ definierten, reellwertigen und stetigen Funktionen werden die Operationen $(f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x)$ und $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ erklärt. Man überprüfe folgende Funktionensysteme auf lineare Unabhängigkeit:

   (a) $\left\{1, e^x, e^{2x}\right\}$, (b) $\left\{1, \cos x, \cos 2x, \cos^2 x\right\}$,

   (c) **(HA)** $\{1, \sin x, \cos x\}$, (d) **(HA)** $\{\sin x, \cos x, \tan x\}$.

   Zusatz: Zeigen Sie die lineare Unabh. von $\{\sin kx\,,\ k = 0, \ldots, N\}$ im Raum $C[0, 2\pi]$.

3. Es seien $g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ sowie $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Man zeige, dass jedes Element von $\mathbb{R}^2$ eine Linearkombination von g_1 und g_2 ist.

   (b) **(HA)** Stellen Sie die Vektoren $e_1 + 2\,e_2$ und $e_1 - 2\,e_2$ in der Basis $\{g_1, g_2\}$ dar.

4. Seien $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $g_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Man zeige, dass sowohl $\{e_1, e_2, e_3\}$ als auch $\{g_1, g_2, g_3\}$ eine Basis im $\mathbb{R}^3$ bilden und stelle $x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ in beiden Basen dar.

   (b) **(HA)** Ist das System $\{g_1, g_1 + g_2, g_2 + g_3\}$ eine Basis im $\mathbb{R}^3$?

5. Es seien $a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ und $b = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$.

   (a) Man ergänze die Vektoren a und b zu einer Basis im $\mathbb{R}^3$.

   (b) Geben Sie alle Vektoren $c \in \mathbb{R}^3$ an, die zusammen mit a und b eine Basis im $\mathbb{R}^3$ bilden.

6. **(HA)** Es seien R ein Ring und M, N nichtleere Mengen mit $N \subset M$. Man zeige, dass die Menge $\left\{f \in R^M : f(x) = 0 \quad \forall x \in N\right\}$ ein Untermodul von R^M ist.

7. Es sei $\mathbb{R}_n[t]$ wie oben definiert, und es seien $\mathbb{G}_n[t] = \{p(t) \in \mathbb{R}_n[t] : p(-t) = p(t)\}$ und $\mathbb{U}_n[t] = \{p(t) \in \mathbb{R}_n[t] : p(-t) = -p(t)\}$. Man zeige, dass $\mathbb{R}_n[t] = \mathbb{G}_n[t] \bigoplus \mathbb{U}_n[t]$ gilt.

   (HA) Sei $M = \{p(t) \in \mathbb{R}_n[t] : p(0) = p(1) = 0\}$. Berechnen Sie die Dimension von M.

8. **(HA)** Für welche reellen Zahlen a, b, c, d, e, f bilden folgende Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^4$:

   $$\begin{bmatrix} 1 & a & b & c \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & d & e \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & f \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

9. **(HA)** Für welche reellen Zahlen λ sind die folgenden Vektoren linear unabhängig:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda+1 & -2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda^2+\lambda-2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} \lambda & -4 & \lambda^3+2\lambda+1 \end{bmatrix}^T$$

10. Man untersuche die folgenden Abbildungen auf Linearität:

(a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto a$ $(a \in \mathbb{R}^3$ konstant)
(b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto x + a$ $(a \in \mathbb{R}^3$ konstant)
(c) **(HA)** $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto \alpha\, x$ $(\alpha \in \mathbb{R}$ konstant)
(d) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^1$, $[x_1, x_2, x_3]^T \mapsto x_1 + 2x_2 + 3x_3$
(e) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^1$, $[x_1, x_2, x_3]^T \mapsto x_1^2 + 2x_2 + 3x_3$
(f) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $[x_1, x_2]^T \mapsto [x_1 + x_2, x_1 - x_2]^T$
(g) **(HA)** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $[x_1, x_2]^T \mapsto [x_1^2 - x_2^2, 0]^T$
(h) **(HA)** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $[x_1, x_2]^T \mapsto [(x_1 + 1)^2 - (x_1 - 1)^2, 0]^T$

Zusatz: Im Falle der Linearität gebe man die Matrixdarstellung der Abbildung f (siehe Abschnitt 6.1) bezüglich der kanonischen Basis an.

11. Man bestimme $\ker f$ und **(HA)** die Matrixdarstellung (siehe Abschnitt 6.1) bezüglich der kanonischen Basis für folgende lineare Abbildungen:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $[x_1, x_2]^T \mapsto [x_1, 0]^T$
(b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $[x_1, x_2]^T \mapsto [-x_2, x_1]^T$
(c) $f : \mathbb{R}_n[t] \longrightarrow \mathbb{R}_n[t]$, $p(t) \mapsto p'(t)$ $(p'(t)$ bezeichnet die Ableitung von $p(t)$ nach $t)$
(d) $f : \mathbb{R}_n[t] \longrightarrow \mathbb{R}$, $p(t) \mapsto p(0)$

12. Die Menge $T_n = \left\{ \sum\limits_{k=-n}^{n} a_k t^k : a_k \in \mathbb{C}, \ t = \cos\varphi + \mathbf{i} \sin\varphi \right\}$ der trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq n \in \mathbb{N}$ betrachten wir als Teilmenge des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\mathbb{C}^{\mathbb{T}}$ der Abbildungen $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, wobei $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ den Einheitskreis bezeichnet. Man zeige, dass T_n ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist und bestimme dessen Dimension.

13. Man bestimme die Dimension des $\mathbb{R}$- bzw. $\mathbb{C}$-Vektorraumes der komplexen Zahlen, versehen mit der dort üblichen Addition und

(a) der üblichen Multiplikation mit reellem λ,
(b) der üblichen Multiplikation mit komplexem λ.

Man gebe jeweils eine Basis an und stelle die Zahl $z = \dfrac{3 + \mathbf{i}}{5 - 2\mathbf{i}}$ in dieser Basis dar.

14. Man gebe die Matrixdarstellung (bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$) folgender linearer Operatoren an:

(a) Drehung der Ebene um den Winkel φ um den Ursprung,
(b) Spiegelung an der Achse die durch den Ursprung geht und mit der positiven x-Achse den Winkel ψ einschliet.

Zeigen Sie: Jede Drehung der Ebene kann als Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen erzeugt werden.

15. **(HA)** Man zeige, dass $B = \{(t - 1)^2, t^2, (t + 1)^2\}$ eine Basis des $\mathbb{R}_2[t]$ ist und (**Zusatz**) bestimme die Matrixdarstellung des Differentialoperators bezüglich dieser Basis.