Lineare Algebra/Analytische Geometrie für Physiker

4. Übung

1. Zeigen Sie mit Hilfe einer Gruppentafel, dass die vierten Einheitswurzeln bzgl. der gewöhnlichen Multiplikation komplexer Zahlen eine kommutative Gruppe $(E_4, \cdot)$ bilden. Dabei versteht man unter einer Gruppentafel ein quadratisches Schema, aus dem die Verknüpfungen von je zwei Elementen der Gruppe erkennbar sind, also z.B.

	a_1	a_2	$\cdots$
a_1	a_1a_1	a_1a_2	$\cdots$
a_2	a_2a_1	a_2a_2	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

2. Geben Sie (bis auf Isomorphie) alle Gruppen an, die aus 2, 3 bzw. 4 Elementen bestehen.

3. Stellen Sie die Verknüpfungstafeln für $(\mathbb{Z}/(4), +)$ und $(\mathbb{Z}/(4), \cdot)$ auf, und erläutern Sie anhand dieser Tafeln, weshalb der Restklassenring $(\mathbb{Z}/(4), +, \cdot)$ kein Körper ist.

4. (a) Stellen Sie die Verknüpfungstafel für die Permutationsgruppe $(S_3, \circ)$ aller Permutationen aus drei Elementen auf.
   (b) **(HA)** Ist diese Gruppe kommutativ?
   (c) **(HA)** Geben Sie alle kommutativen Untergruppen der $(S_3, \circ)$ an.

5. Es seien $(A, \circ_1)$ und $(B, \circ_2)$ Gruppen. Zeigen Sie, dass
   (a) $G = \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$ mit der Verknüpfung $(a, b) \circ (\widetilde{a}, \widetilde{b}) := (a \circ_1 \widetilde{a}, b \circ_2 \widetilde{b})$ eine Gruppe ist,
   (b) die Gruppe $(A, \circ_1)$ isomorph zu der Untergruppe $(\widetilde{A}, \circ)$ von $(G, \circ)$ mit
   $$\widetilde{A} = \{(a, e_B) : a \in A\} \subset G$$
   ist, wobei e_B das Einselement in B bezeichnet.

6. (a) Es sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass $\varphi_g : G \longrightarrow G,\ x \mapsto g^{-1}x\,g$ für jedes fest gewählte $g \in G$ ein Automorphismus (**innerer Automorphismus** genannt) ist.
   (b) **(HA)** Zeigen Sie, dass die inneren Automorphismen einer Gruppe G mit der Komposition $(\varphi \diamond \psi)(x) = \psi(\varphi(x))$ eine Gruppe $(G_{\text{aut}}, \diamond)$ bilden.

7. Es seien G eine Gruppe und $\varphi : G \longrightarrow G$ definiert durch $\varphi(x) = x^2$. Beweisen Sie, dass φ genau dann ein Morphismus ist, wenn G eine kommutative Gruppe ist.

8. Es sei $(S_\triangle, \circ)$ die Bewegungsgruppe eines gleichseitigen Dreiecks.
   (a) Stellen Sie die Gruppentafel auf.
   (b) Geben Sie alle Untergruppen an.
   (c) Geben Sie alle Normalteiler an.

9. **(HA)** Lösen Sie die Aufgabe 8 für die Bewegungsgruppe $(S_\Box, \circ)$ eines Quadrates.

10. Es seien die Gruppen $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ gegeben. Zeigen Sie, daß die Abbildung $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \,,\ x \mapsto |x|$ ein surjektiver Morphismus mit dem Kern $\ker f = \{-1, +1\}$ ist.

11. Seien $(G_1, \circ_1)$, $(G_2, \circ_2)$ Gruppen und $f : G_1 \to G_2$ Gruppenmorphismus, e_1 bezeichne das neutrale Element in G_1. Zeigen Sie, dass f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $f(G_1) = G_2$ und $\ker f = \{e_1\}$.

12. **(HA)** Sei N ein Normalteiler der Gruppe G und f ein Automorphismus. Zeigen Sie, dass $f(N)$ wieder ein Normalteiler von G ist.

13. **(HA)** Seien M eine nichtleere Menge, R ein Ring und F die Menge aller Abbildungen $f : M \to R$. Wir versehen F mit den (punktweise definierten) Verknüpfungen

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (fg)(x) := f(x)g(x) \quad \forall\, x \in M.$$

Zeigen Sie, dass F ein Ring ist.

14. $\mathbb{P}$ sei die Menge aller Polynome der Gestalt $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, mit der binären Operation $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

    (a) Untersuchen Sie, ob $(\mathbb{P}, +, \circ)$ ein Ring ist.

    (b) Welche Teilmenge $\mathbb{P}_0$ von $\mathbb{P}$ ist bzgl. der Verknüpfung "$\circ$" eine Gruppe? Ist diese kommutativ?

    (c) Ist $(\mathbb{P}_1, \circ)$ mit $\mathbb{P}_1 = \{f \in \mathbb{P}_0 : f(1) = 1\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{P}_0, \circ)$?