Lineare Algebra/Analytische Geometrie für Physiker

3. Übung

1. Es seien

   (a) **(HA)** $a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}^T$, $b = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 \end{bmatrix}^T$,

   (b) $a = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T$, $b = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T$.

   Man berechne $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $(\vec{a}, \vec{b})$, $\vec{a} \times \vec{b}$, den Flächeninhalt des Parallelogrammes, welches von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, sowie eine Richtung $\vec{c}$, die senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

2. Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Richtungen, die einen Winkel von 30^o einschließen. Man berechne das Skalarprodukt $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$.

3. **(HA)** Seien $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 4$ und $\vec{a}, \vec{b}$ schließen einen Winkel von $\frac{3\pi}{4}$ ein. Man berechne das Skalarprodukt $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b})$.

4. **(HA)** Gegeben seien $a = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$, $b = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, $c = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^T$, $d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ und $e = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$. Man berechne die Projektionen $\vec{a}_b$, $\vec{c}_a$ und $\vec{c}_d$ sowie $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{e} \times \vec{d}$.

5. Existieren Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die gleichzeitig die Eigenschaften $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 4$ und $|\vec{a} \times \vec{b}| = 30$ besitzen?

6. (a) Man bestimme alle Vektoren, die auf $\vec{a}$ mit $a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ senkrecht stehen.

   (b) Man bestimme alle Vektoren, die auf $\vec{a}$ mit $a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ und $\vec{b}$ mit $b = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ senkrecht stehen.

7. Gibt es einen Vektor, der mit den Vektoren $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ je einen Winkel von 45^o einschließt?

8. Man beweise: Ist $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$, so gilt $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

9. **(HA)** Liegen die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ mit $a = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}^T$, $b = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}^T$ und $c = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}^T$ in einer gemeinsamen Ebene?

10. Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide habe die Eckpunkte $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$ und $C(0,0,6)$. Der Punkt $D(2,3,8)$ sei die Spitze der Pyramide. Man berechne

    (a) den Inhalt der Grundfläche,

    (b) die Höhe der Pyramide,

    (c) den Fußpunkt des Lotes von D auf die Grundfläche und

    (d) das Volumen der Pyramide.

11. Beweisen Sie den Satz des Thales!

12. **(HA)** Zeigen Sie, dass die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen Vierecks die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden!

    (Z) Zeigen Sie, dass sich die drei Höhen in einem Dreieck in einem Punkt schneiden.

13. Die Ebene E enthalte die Punkte $A(1,4,0)$, $B(-1,2,3)$ und $C(1,0,0)$. Man berechne

    (a) eine Parametergleichung von E,
    (b) eine parameterfreie Gleichung von E,
    (c) die Gleichung von E in Hessescher Normalform,
    (d) den Abstand des Punktes $P(2,-1,-3)$ von E,
    (e) den Fußpunkt des Lotes von P auf E und
    (f) den Schnittpunkt von E mit der Geraden

    $$g = \left\{ \begin{bmatrix} -2 & -4 & 3 \end{bmatrix}^T + t \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

14. **(HA)** Welchen Abstand hat der Punkt $P(16,-9,7)$ von der Ebene durch die Punkte $A(1,4,2)$, $B(0,-2,1)$ und $C(2,1,-1)$? In welchen Punkten schneidet diese Ebene die Koordinatenachsen?

15. Gegeben seien zwei Ebenen E_1 und E_2 : E_1 liegt parallel zur Ebene $x + 2y + 2 = 0$ und enthält den Punkt $P(2,5,-6)$. E_2 enthält die Punkte $Q(1,0,1)$, $R(-1,-2,1)$ und $S(4,1,2)$. Man bestimme

    (a) die Ebenengleichungen von E_1 und E_2,
    (b) die Schnittgerade von E_1 und E_2.

16. Bestimmen Sie den Schnittwinkel der Ebenen

    $$E_1 : 2x + y + z - 4 = 0 \quad \text{und} \quad E_2 : x + 2y - z + 3 = 0 .$$

17. **(HA)** Man bestimme die Gleichungen der Ebenen, die parallel zur Ebene $2x+2y+z-8 = 0$ liegen und von ihr den Abstand 4 haben.

18. Berechnen Sie den Abstand der Geraden

    $$g_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad g_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

19. **(HA)** Bestimmen Sie den Abstand der Geraden

    $$g_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 12 & -7 & 3 \end{bmatrix}^T + t \begin{bmatrix} 9 & -8 & 1 \end{bmatrix}^T : t \in \mathbb{R} \right\}$$

    und

    $$g_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}^T + t \begin{bmatrix} -3 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T : t \in \mathbb{R} \right\}$$

    sowie die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes.