Lineare Algebra/Analytische Geometrie für Physiker

2. Übung

1. Man berechne Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

   (a) $(2+3\mathbf{i})(3-2\mathbf{i})$, (b) $(1+\mathbf{i})^3$, (c) $(1+2\mathbf{i})^6$, (d) $\dfrac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}$, (e) **(HA)** $\dfrac{2\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}$,

   (f) **(HA)** $\dfrac{4-3\mathbf{i}}{4+3\mathbf{i}}$ (g) $\dfrac{a+b\mathbf{i}}{a-b\mathbf{i}}$ $(a,b\in\mathbb{R},\ (a,b)\neq(0,0))$, (h) $\dfrac{(1+\mathbf{i})^{10}}{(1-\mathbf{i})^8}$,

   (i) **(HA)** $\dfrac{1}{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}$, (j) **(HA)** $\dfrac{(1-\mathbf{i})^5-1}{(1+\mathbf{i})^5+1}$, (k) $(a+b\mathbf{i})^n$ $(n\in\mathbb{N})$.

2. Man stelle folgende komplexe Zahlen in trigonometrischer Form dar:

   (a) **(HA)** $\cos\varphi-\mathbf{i}\sin\varphi$ $(\varphi\in\mathbb{R})$, (b) -1, (c) $2-2\mathbf{i}$, (d) **(HA)** $-a^2\mathbf{i}$ $(a\in\mathbb{R})$,

   (e) $\sin\alpha+\mathbf{i}(1-\cos\alpha)$ $(\alpha\in[0,2\pi))$, (f) $1+\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{4}$, (g) **(HA)** $-\dfrac{1}{2}+\mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Sei $z=x+\mathbf{i}\,y$ bzw. $z=r(\cos\varphi+\mathbf{i}\sin\varphi)$ eine beliebige komplexe Zahl $(z\neq0)$. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument folgender komplexer Zahlen:

   (a) $\overline{z}$, (b) $\dfrac{1}{\overline{z}}$, (c) **(HA)** $\dfrac{1}{z}$, (d) z^2, (e) **(HA)** $\mathbf{i}\,z$, (f) $z\overline{z}$, (g) $\left|\dfrac{z}{\overline{z}}\right|$.

4. Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen mit der Eigenschaft

   (a) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}=c$, (b) $\left|\dfrac{1}{z}\right|\leq3$, (c) $2<|z|<4$, (d) $0\leq\arg z<\frac{\pi}{4}$,

   (e) $|z-z_0|=|z-z_1|$, (f) **(HA)** $0\leq\ \operatorname{Im} z\leq2\pi$ und $|\operatorname{Re} z|<1$,

   (Z1) $|z+3|+|z-3|\leq10$, **(Z2)** $|z|<1+\operatorname{Re} z$.

5. **(HA)** Sei $z=\dfrac{1}{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}$. Für welche natürlichen Zahlen n ist z^n reell?

6. Man berechne mit Hilfe der Formel von Moivre

   (a) $(1+\mathbf{i})^{10}$, (b) $(1-\mathbf{i}\sqrt{3})^6$, (c) **(HA)** $(-1+\mathbf{i})^5$, (d) **(HA)** $(\sqrt{3}+\mathbf{i})^3$.

7. Man zeige, dass für alle $n\in\mathbb{N}$ und für alle $\alpha\in\mathbb{R}$ mit $\alpha,n\alpha\notin\left\{\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$ die Beziehung

   $$\left(\frac{1+\mathbf{i}\tan\alpha}{1-\mathbf{i}\tan\alpha}\right)^n=\frac{1+\mathbf{i}\tan n\alpha}{1-\mathbf{i}\tan n\alpha}$$

   gilt.

8. Man bestimme alle Lösungen folgender Gleichungen:

   (a) $z^3=-1$, (b) **(HA)** $z^5=1$, (c) **(HA)** $z^3-\mathbf{i}=0$, (d) $z^4+1=0$,

   (e) $z^3+2=2\mathbf{i}$, (f) $z^4=-8+8\sqrt{3}\,\mathbf{i}$, (g) $z^2=-3-4\mathbf{i}$,

   (h) **(HA)** $z^6=64$, (i) $z^4-2\mathbf{i}z^2+2\mathbf{i}=1$, (j) **(HA)** $z^2+4\mathbf{i}z=5$,

   (Z1) $z^2+4\mathbf{i}z+5=0$, **(Z2)** $\mathbf{i}z^2-2z-\mathbf{i}+1=0$, **(Z3)** $|z|-z=1+2\mathbf{i}$,

9. Zeigen Sie, dass für beliebige komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ die Beziehung

$$2(|z|^2 + |w|^2) = |z - w|^2 + |z + w|^2$$

gilt.

10. Zerlegen Sie folgende Polynome sowohl in komplexe Linearfaktoren als auch in reelle Linear- und (wenn nötig) quadratische Faktoren:

    (a) $z^2 + 3 + 4\mathbf{i}$, (b) $z^3 + 1$, (c) $z^4 - 16$.

11. Man berechne die Summe aller n Lösungen der Gleichung $z^n = 1$.

12. **(HA)** Man stelle $\cos n\varphi$ und $\sin n\varphi$ $(n \in \mathbb{N})$ durch Potenzen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ dar.

    Hinweis: Man wende den binomischen Satz und die Formel von Moivre auf $(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)^n$ an.