

Lineare Algebra/Analytische Geometrie für Physiker

1. Übung

1. Geben Sie folgende Mengen mit Hilfe ihrer Grundmenge und der Eigenschaft ihrer Elemente an:

$$M_1 = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}, M_2 = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\} \text{ (HA)},$$

$$M_3 = \{2, 4, 8, 16, 32, \dots\} \text{ (HA)},$$

$$M_4 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \dots\right\}, M_5 = \{-1, 1\}, M_6 = [-1, 1],$$

$$M_7 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}, M_8 = \{-4, -2, 2, 4\} \text{ (HA)}.$$

2. Geben Sie folgende Mengen (wenn möglich) durch Aufzählung ihrer Elemente an:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2g, g \in \mathbb{Z}\} \cap \{x \in \mathbb{Z} : x = 3g, g \in \mathbb{Z}\},$$

$$M_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2g, g \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{Z} : x = 3g, g \in \mathbb{Z}\},$$

$$M_3 = \{x \in \mathbb{R} : (x+1)^3 = x^3 + 1\}, M_4 = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = \cos x\} \text{ (HA)},$$

$$M_5 = \{x \in \mathbb{R} : e^x = 0\}, M_6 = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = -\cos x\} \text{ (HA)},$$

$$M_7 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 + 2x = (x+1)^2\} \text{ (HA)},$$

$$M_8 = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 1} = x - 1\right\}, M_9 = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 3\}.$$

3. Welche Beziehungen (Inklusionen) bestehen zwischen (Grundmenge sei stets die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen)

(a) der Lösungsmenge der Gleichung $\sin \frac{x}{3} \cdot \sin \frac{x}{5} = 0$, der Lösungsmenge der Gleichung $\sin \frac{x}{3} = 0$ und der Lösungsmenge der Gleichung $\sin \frac{x}{5} = 0$,

(b) (HA) der Lösungsmenge der Gleichung $2 \sin^2 x = 1$ und der Lösungsmenge der Gleichung $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$?

4. Bilden Sie für die Mengen $I = \{a\}$ und $M = \{\ell, m, n\}$ die Mengen $I \times M$, $M \times I$ und M^2 .

5. Es seien A, B, C beliebige Mengen. Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Gleichungen:

(a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

(b) (HA) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$,

(c) (HA) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$,

(d) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, wobei $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die sog. symmetrische Differenz zweier Mengen A und B bezeichnet,

(e) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

6. Für $t > 0$ sei $M_t = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq t\}$. Bestimmen Sie

(a) $\bigcup_{0 < t \leq 1} M_t$, (b) $\bigcap_{0 < t \leq 1} M_t$, (c) $\bigcap_{1 \leq t \leq 2} M_t$,

(d) (HA) $\bigcup_{0 < t < 1} M_t$, (e) (HA) $\bigcap_{0 < t < 1} M_t$.

7. Es seien I eine beliebige Indexmenge und $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ein Mengensystem mit $M_\alpha \subset E$ für beliebiges $\alpha \in I$. Zeigen Sie

$$(a) \bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha^c = \left(\bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha \right)^c,$$

$$(b) \text{ (HA) } \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha^c = \left(\bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha \right)^c,$$

wobei $M_\alpha^c := E \setminus M_\alpha$ die sog. Komplementärmenge von M_α bzgl. der Menge E bezeichnet.

8. Man gebe die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ und die Menge $N := M^2$ (HA) für $M = \{1, 3, 5\}$ an.
9. Das Symbol $\#M$ bezeichne die Anzahl der Elemente einer Menge M . Man beweise, daß für jede Menge M mit $\#M < \infty$ die Beziehung $\#\mathcal{P}(M) = 2^{\#M}$ gilt.
10. Geben Sie alle Funktionen $f : I \rightarrow M$ an für
- (a) $I = \{a_1, a_2\}$, $M = \{1, 2\}$,
- (b) $I = \{1\}$, $M = \{\ell, m, n\}$,
- (c) $I = \{a, b\}$, $M = \{3\}$.
11. Entscheiden Sie, ob folgende Funktionen $f : A \rightarrow B$ injektiv, surjektiv, bijektiv sind:

- (a) $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$,
- (b) (HA) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $f(x) = e^x$,
- (c) $A = \mathbb{R}_+$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$,
- (d) $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$,
- (e) (HA) $A = \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$,
- (f) (HA) $A = B = \mathbb{N}$, $f(n) = n^2$,
- (g) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q}$, $f(n) = \frac{1}{n}$,
- (h) $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = |2x - 4|$.

12. Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Man zeige:

- (a) Aus $A \subset B \subset X$ folgt $f(A) \subset f(B)$.
- (b) Für beliebige $A, B \subset X$ gilt $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- (c) (HA) Es gilt $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(X)$.
- (d) (HA) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
- (e) Für beliebige $A, B \subset Y$ gilt $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

13. Es seien $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ zwei Abbildungen und

$$h = g \circ f : X \rightarrow Z, \quad x \mapsto g(f(x))$$

ihre Komposition. Zeigen Sie, dass h surjektiv (injektiv, bijektiv) ist, wenn f und g surjektiv (injektiv, bijektiv) sind. (Ist h auch unter schwächeren Voraussetzungen an f und g bijektiv?)

14. Für welche reellen Zahlen a, b, c, d ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (ax + b, cy + d)$$

surjektiv, injektiv, bijektiv?

15. Sei S_n die Menge aller Permutationen der Ordnung n . Man bestimme $\#S_n$.

16. Es seien

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechne $\sigma_1 \circ \sigma_2$ (**HA**), $\sigma_1 \circ \sigma_1$ (**HA**), $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ und σ_3^{-1} .

17. In der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ seien folgende Relationen R_1 bis R_6 erklärt:

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}, \quad R_2 = \{(4, 4)\} \cup R_1, \quad R_3 = R_2 \cup \{(1, 3)\} \quad (\mathbf{HA}),$$

$$R_4 = R_3 \cup \{(3, 1)\}, \quad R_5 = R_4 \cup \{(1, 2), (2, 1), (3, 2), (2, 3)\} \quad (\mathbf{HA}),$$

$$R_6 = R_2 \cup \{(2, 3), (3, 2), (1, 2), (2, 1)\}.$$

- Welche Relationen sind Äquivalenzrelationen?
- Man ergänze die Relationen, die keine Äquivalenzrelationen sind, durch Hinzufügen möglichst weniger weiterer Elemente aus $M \times M$ zu einer Äquivalenzrelation.
- Man bestimme jeweils alle Äquivalenzklassen.

18. Welche der folgenden Relationen auf der Menge X sind reflexiv, symmetrisch, transitiv?

- $X = \mathbb{N}$, $m R_a n \Leftrightarrow_{\text{def}} m + n$ ist gerade,
- (**HA**) $X = \mathbb{N}$, $m R_b n \Leftrightarrow_{\text{def}} m + n$ ist ungerade,
- $X = \mathbb{N}$, $m R_c n \Leftrightarrow_{\text{def}} |m - n| \leq 2$,
- $X = \mathbb{N}$, $m R_d n \Leftrightarrow_{\text{def}} \frac{m}{n}$ ist ganzzahlige Potenz von 2,
- $X = \mathbb{N}$, $m R_e n \Leftrightarrow_{\text{def}} m|n$,
- $X = \mathbb{R}$, $x R_f y \Leftrightarrow_{\text{def}} e^x = e^y$,
- (**HA**) $X = \mathbb{R}$, $x R_g y \Leftrightarrow_{\text{def}} x^2 = y^2$,
- $X = \mathbb{Z}$, $a R_h b \Leftrightarrow_{\text{def}} 4|(a - b)$,
- (**HA**) $X = \mathbb{N}$, $m R_i n \Leftrightarrow_{\text{def}} mn$ ist ungerade,
- $X = \mathbb{R}$, $x R_j y \Leftrightarrow_{\text{def}} x \leq y$.

19. Zeigen Sie, dass die Relation $(a_1, b_1)R(a_2, b_2) \Leftrightarrow_{\text{def}} a_1 b_2 = a_2 b_1$ auf \mathbb{N}^2 eine Äquivalenzrelation ist und dabei jede Äquivalenzklasse mit einer positiven rationalen Zahl identifiziert werden kann.

20. Es sei $P \subset \mathcal{P}(M)$ ein System paarweise disjunkter, nichtleerer Teilmengen von M mit

$$\bigcup_{A \in P} A = M,$$

d.h. P ist eine Partition von M . Die Relation $R \subset M \times M$ sei definiert durch

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow_{\text{def}} \exists A \in P : x \in A \text{ und } y \in A.$$

Man zeige, dass R eine Äquivalenzrelation ist.