Algebra I für Physiker

Prüfungsklausur, 13.2.2008

Lösungen

1. Ja, denn $x \in A \cap (B \setminus C) \iff x \in A$ und $x \in B$, aber $x \notin C \iff x \in A \cap B$ und $x \notin A \cap C \iff x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$. (3P)

2. (a) f heißt injektiv, wenn aus $x_1, x_2 \in X$ und $f(x_1) = f(x_2)$ stets $x_1 = x_2$ folgt, und heißt surjektiv, wenn $f(X) = Y$. Ist f sowohl injektiv als auch surjektiv, so heißt f bijektiv. (2P)

   (b) f_1 ist surjektiv, da die Gleichung $z^6 - 1 = a$ für jedes $a \in \mathbb{C}$ nach dem Fundamentalsatz der Algebra eine Lösung besitzt, jedoch nicht injektiv, da $f_1(1) = f_1(-1)$.

   f_2 ist weder injektiv noch surjektiv, vgl. $f_2(z) \geq -1$ für alle $z \in \mathbb{R}$.

   f_3 ist bijektiv. (3P)

   (c) $N = \{e^{\frac{k}{3}\pi\mathbf{i}} : k = 0, \ldots, 5\}$. Die Multiplikation ist assoziativ und führt nicht aus N heraus. Darüber hinaus ist $1 \in N$ das neutrale Element und jedes $z \in N$ besitzt ein Inverses in N. (4P)

   Z: N ist zyklisch und wird jeweils durch $e^{\frac{1}{3}\pi\mathbf{i}}$ oder $e^{\frac{5}{3}\pi\mathbf{i}}$ erzeugt. (1Z)

   (d) Da $z_1 z_1^{-1} = 1$, $z_1 z_2^{-1} = (z_2 z_1^{-1})^{-1}$ und $z_1 z_3^{-1} = z_1 z_2^{-1} z_2 z_3^{-1}$ liegt eine Äquivalenzrelation vor. Die Klassen sind $\{1, -1\}$, $\{e^{\frac{1}{3}\pi\mathbf{i}}, e^{\frac{4}{3}\pi\mathbf{i}}\}$ und $\{e^{\frac{2}{3}\pi\mathbf{i}}, e^{\frac{5}{3}\pi\mathbf{i}}\}$. (4P)

3. (a) $z = \dfrac{(1+\mathbf{i})^{10}}{1-\mathbf{i}} = \dfrac{2^5 e^{\frac{10\pi}{4}\mathbf{i}}}{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}\mathbf{i}}} = 16\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}\mathbf{i}} = -16 + 16\mathbf{i}$ (2P)

   (b) $z(z - 4\mathbf{i}) - 4 = z^2 - 4\mathbf{i}\, z - 4 = (z - 2\mathbf{i})^2 = 0 \iff z = 2\mathbf{i}$ (2P)

   (**Z**) Wegen $\left|\dfrac{\overline{z}}{z}\right| = 1 \;\forall z \in \mathbb{C}$ ist $z = 2$ einzige Lösung. (1Z)

4. Normalenvektor von E_1: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Erhalten daraus die Hesse'sche Normalform

$$E_1 : \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{x} \right\rangle = 0$$

und ebenso

$$E_2 : \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{x} \right\rangle = 0.$$

   (a) Der gesuchte Winkel α genügt der Gleichung

$$\left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \sqrt{2}\sqrt{2}\cos\alpha,$$

woraus $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ folgt. (3P)

(b) Der Abstand von R zu E_1 ist

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle\right| = \sqrt{2}\,.$$

Der Lotfußpunkt von R auf E_1 ist gerade Q. (2P)

(c)

$$V = \frac{1}{6}\left|\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle\right| = \frac{1}{3}.$$

(1P)

5. (a) Bekanntermaßen wird $\mathbb{R}_4[x]$ mit diesen Operationen zu einem Vektorraum. Es genügt deshalb zu zeigen, dass $\alpha p + \beta q \in W$ für alle $p, q \in W$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dies folgt aber aus

$$(\alpha p + \beta q)(\pi) = \alpha p(\pi) + \beta q(\pi) = 0.$$

Alternative: Überprüfen der Vektorraumaxiome für W. (2P)

(b) $B = \{p_1, \ldots, p_m\}$ heißt Basis von W, wenn B Erzeugendensystem von W (d.h. $\mathcal{L}[B] = W$) und B linear unabhängig ist (d.h. aus $\sum_{i=1}^m \alpha_i p_i = 0$ und $\alpha_i \in \mathbb{R}$ folgt stets, dass alle $\alpha_i = 0$). (2P)

(c) Die Polynome

$$p_1(x) = x - \pi,\ p_2(x) = x(x - \pi),\ p_3(x) = x^2(x - \pi) \text{ und } p_4(x) = x^3(x - \pi)$$

bilden eine Basis in W. (2P)